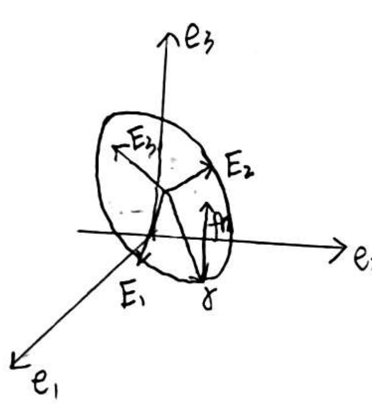
Euler Disk

Euler 盘是 J. Bendik 在 1987-1990年期间所发明的一个玩具. 这个玩具由两部分组成 一个镜面, 与一个圆柱形的扁的铁盘. 这个铁盘通常打磨得十分光滑。如果竖直地在镜面上转动这个铁盘, 铁盘可在镜面上转动长达几分钟。下面我们用理论力学的知识, 建立理想情况下 Euler盘的运动微分方程.

不失一般性. 我们假设 Euler盘的厚度为0. 其与水平地面都是光滑的. 这样地面作用在盘上的支撑力垂直向上. 忽略一切阻力. 仅考虑重力. 我们由质心运动定理立即知盘的质心在水平方向是的速度是恒定的。不失一般性. 设质心水平速度恒为0.



令 $n=(0,0,1)^T$, v_c 为质心竖直速度, m为盘的质量. 与盘固结的坐标系为 $E_1E_2E_3$. g为重力加速度, f为支撑力大小(向上为正).

γ 为接触点在 $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ 的矢径. $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ 是从 $e_1e_2e_3$ 平移到质心的坐标系.

由 $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ 旋转变换到 $E_1E_2E_3$ 的矩阵为 A_t. 盘位于 E_1E_2 平面内.

在上述记号与假设下. 由质心运动定理

$$\frac{d}{dt} m v_c = -mgn + fn, \qquad (1)$$

设在 $E_1E_2E_3$ 坐标系, 盘的~~转动惯量~~惯性矩量为 $I=\begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$, 角速度为 ω ($\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ 系下), $\Omega=A_t^{-1}\omega$ 为在角速度在 $E_1E_2E_3$ 系下.

那么对质心使用动量矩定理:

$$\frac{d}{dt}\left(A_t I \Omega\right) = [\gamma, fn] \qquad (2)$$

再由接触点的速度是水平的. 我们有

$$\langle v_c + [\omega, \gamma], n \rangle = 0 \qquad (3).$$

由刚体的运动学知识，Ω 与 A_t 均可由欧拉角 (φ,θ,ψ) 及其导数表示，其中

$$\Omega=\begin{pmatrix}\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi\\ \dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi\\ \dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\end{pmatrix}\qquad A_t=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi\\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

由 (1) (2) (3) 描述的微分方程中有 f, γ 是未知的。下面我们来计算 f, γ.

f： (1)式两边同时与 n 内积，得到：

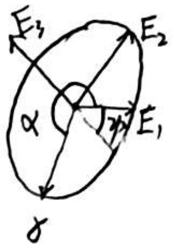
$$\frac{d}{dt}m\langle v_c,n\rangle=-mg+f.$$

又由 (3) $\langle v_c,n\rangle=\langle[\gamma,\omega],n\rangle$，故我们得到

$$f=mg+\frac{d}{dt}m\langle[\gamma,\omega],n\rangle. \qquad (4)$$

γ： 不妨设盘的半径为1，由于 γ 在 E_1E_2 平面内，设 $\gamma=\cos\alpha E_1+\sin\alpha E_2$，
其中 E_1，E_2 分别为矩阵 A_t 的第1，2列。我们应有

$$\langle-\sin\alpha E_1+\cos\alpha E_2,n\rangle=0\Rightarrow\cos(\alpha+\psi)\sin\theta=0\Rightarrow\cos(\alpha+\psi)=0$$



故 $\alpha+\psi=\frac{3}{2}\pi \Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}\pi-\psi$

故代入到 γ 的表述式中有

$$\gamma=(\cos\theta\sin\varphi,-\cos\theta\cos\varphi,-\sin\theta)^T. \qquad (5)$$

将 (4) 代入到 (2) 中我们得到

$$\frac{d}{dt}(A_tI\Omega)=\left[\gamma,\left(mg+\frac{d}{dt}m\langle[\gamma,\omega],n\rangle\right)n\right] \qquad (6)$$

其中 γ 由 (5) 给出，(6) 是关于三个Euler角的三个二阶常微分方程.

设 y 为质心~~的~~坐标的第三个分量，那么由 (3)

$$\dot y=\langle[\gamma,\omega],n\rangle \qquad (7)$$

方程 (6)，(7) 完全确定了刚体的运动。不难看出，上述推导对任意的光滑刚体在光滑地面的运动都成立。不过 γ 作为Euler角的函数，其与刚体的形状有关

下面我们简单讨论一下方程(6),(7)的守恒量.

首先,由于无任何阻尼,系统能量守恒:

$$E=\frac{1}{2}\langle I\Omega,\Omega\rangle+\frac{1}{2}m\dot{r}^2+mgr$$

将刚体绕着e_3轴旋转不会改变其动能势能,故角动量在e_3轴的投影守恒.

实际上,由(2),角动量的导数始终是水平的,即其第三个分量守恒:

$$(A_t I\Omega)_3=\frac{1}{2}\left[I_1+I_3+(I_3-I_1)\cos 2\theta\right]\dot{\varphi}+I_3\cos\theta\,\dot{\psi}. \quad (I_1=I_2)$$

最后,由于盘的对称性,绕E_3轴旋转也不会改变动能势能,故角动量在E_3轴的投影守恒.

$$(I\Omega)_3=I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta).$$

由于系统是非完整的,E与$(I\Omega)_3$的守恒性还需要手动验证一下.