

国内图书分类号：O193
国际图书分类号：531.3

密级：公开

西南交通大学
博 士 研 究 生 学 位 论 文

几类非光滑系统中的不变环面
及其破坏机理

年 级 2018
姓 名 张晓明
申请学位级别 工学博士
专 业 力学
指 导 教 师 谢建华 教授

二〇二二年 五月 九日

Classified Index: O193
U.D.C: 531.3

Southwest Jiaotong University
Doctor Degree Dissertation

INVARIANT TORI AND ITS DESTRUCTION
MECHANISMS IN SOME NON-SMOOTH SYSTEMS

Grade: 2018

Candidate: Zhang Xiaoming

Academic Degree Applied for: Engineering Doctor

Specialty: Mechanics

Supervisor: Prof. Xie Jianhua

May 9, 2022

西南交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权西南交通大学可以将本论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复印手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1. 保密□，在 年解密后适用本授权书
2. 不保密□，使用本授权书。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：

指导老师签名：

日期：

日期：

西南交通大学博士学位论文创新性声明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是在导师指导下独立进行研究工作所得的成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果. 对本文的研究做出贡献的个人和集体, 均已在文中作了明确说明. 本人完全了解违反上述声明所引起的一切法律责任将由本人承担.

本学位论文的主要创新点如下:

1. 研究了双面碰撞倒摆在周期激励下的全局动力学. 当周期激励较小时, 运用 KAM 理论分别证明了系统低速以及高速区域碰撞映射不变曲线的存在性, 且高速区域不变曲线的存在性与周期激励的扰动大小无关. 设计了计算碰撞系统不变流形的数值算法, 此算法可精确定位不变流形与碰撞面的交点. 利用此算法数值地研究了低速区域环面破坏与不变流形大范围缠结之间的联系, 并给出了不变流形在擦切点附近的缠结性态.

2. 在不同的光滑性假设下, 研究了呼吸圆台球模型中不变环面, 逃逸轨道以及 Aubry-Mather 集的存在性.

(2a) 在 C^7 的光滑性条件下, 证明了角动量约化后的系统在无穷远处存在不变环面.

(2b) 当光滑性降低至 C^0 时 (分段光滑), 通过建立奇点附近的范式映射, 证明了逃逸轨道的存在性, 从而给出了一个因光滑性丧失而导致无穷远处不变环面破坏的力学系统.

(2c) 运用变分方法处理了小扭转情形下 Aubry-Mather 理论的边界问题. 并在 C^1 的光滑性条件下, 运用此理论证明了系统 Aubry-Mather 集的存在性.

3. 研究了带有小周期激励的干摩擦振子. 具体给出了相位映射的定义, 并在适当的假设下证明了相位映射为一个光滑的圆周同胚, 在数值上通过相位映射的图像以及参数变化时魔鬼阶梯证实了这一结论. 利用拓扑的粘合方法证明了系统正向不变环面的存在性. 运用圆周映射理论与 KAM 理论说明了, 当外激励的频率固定在某个区间而其

振幅较小时, 对于大多数的频率相位映射光滑共轭于一个无理平移, 不变环面上的任一轨道也是稠密的. 在数值上发现系统环面破坏的原因是擦切轨道的存在性.

学位论文作者签名:

日期:

摘要

不变环面是动力系统长期演化时最常见的不变集之一. 上世纪六十年代由 Kolmogorov, Arnold, Moser 创建的 KAM 理论与八十年代由 Mather, Aubry 创建的 Aubry-Mather 理论为不变环面的研究提供了强有力的工具. 但对于许多非光滑系统, 上述理论的应用还十分有限, 并且非光滑系统中不变环面的破坏机理仍需要深入探讨. 基于以上问题, 本文对几类非光滑系统不变环面的存在性及其破坏机理作了一些工作, 具体的内容如下:

本文首先简要介绍了 KAM 理论与 Aubry-Mather 理论的发展历史以及这两者在单自由度系统中的一些应用, 并且总结了本论文的主要研究内容及结果.

为了对后续的研究内容作准备, 介绍了扭转映射的基本定义以及几种扭转映射定理, 包括 Moser 扭转定理, Moser 小扭转定理以及 Aubry-Mather 定理; 简要解释了近可积扭转映射与近可积 Hamilton 系统之间的联系, 并总结了 Hamilton 系统中常见的几类变换. 这些变换对将一个具有近可积动力学的系统转化为一个显式的近可积系统是关键.

首先研究了双面碰撞倒摆模型的全局动力学. 在无外激励扰动时, 此系统的相图可划分为三个区域. 运用 Moser 扭转定理与 Moser 小扭转定理, 证明了在小的周期激励扰动下这三个区域内均存在不变环面, 且无穷远处不变环面的存在性与外激励的扰动大小无关. 最后, 设计了带有碰撞效应的不变流形的数值算法. 运用此算法发现, 当外激励的扰动增大时, 低速区域不变环面的破坏是由于鞍点的不变流形在相空间中的大范围缠结.

在不同光滑性假设下, 研究了呼吸圆台球 (breathing circle billiard) 不变环面与逃逸轨道的存在性问题. 当系统具有 C^7 类的光滑性时, 建立了系统在高能量区域的扭转映射, 并运用 Moser 小扭转定理证明了无穷远处不变环面的存在性. 当系统分段光滑时, 给出了奇点附近的范式映射的详细推导过程. 在适当的参数下, 该范式映射的主要项具有一条加速周期轨道. 利用非共振条件确保了该加速周期轨道在小扰动下的稳定性, 这意味着系统存在逃逸轨道, 以及高能量区域的不变环面在系统的光滑性丧失后的破裂.

基于变分方法, 研究了在 C^1 光滑性条件下呼吸圆台球的 Aubry-Mather 集的存在性问题. 首先给出了离散的变分问题与系统解之间的对应关系. 然后, 通过对生成函数的适当假设, 在变分空间存在边界的条件下建立了小扭转情形下的 Aubry-Mather 理论. 该理论保证了对任意小的旋转数, 变分问题都存在相应的极小构型. 最后, 在适当的

坐标下, 证明了呼吸圆台球的生成函数满足所需假设, 即系统存在 Aubry-Mather 集.

前述研究内容都属于非光滑 Hamilton 系统的范畴, 最后, 在耗散的影响下研究了一类带有干摩擦力的强迫振动系统. 首先严格地定义了相位映射, 并在合适的假设下证明了其为一个圆周平移的小扰动; 基于拓扑上的粘合技术, 证明了系统正向不变环面的存在性; 运用圆周映射理论与 KAM 理论讨论了环面上的动力学; 最后利用数值方法, 发现了外激励扰动过大时环面的破坏是由于擦切轨道的存在性.

关键词: 不变环面; 扭转映射; 台球; KAM 理论; Aubry-Mather 理论; 非光滑系统; 环面破裂.

Abstract

In the evolutions of dynamical systems, the invariant torus is one of the most common invariant sets. The KAM theory created by Kolmogorov, Arnold, Moser in the 60s of the last century and the Aubry-Mather theory by Mather, Aubry in the 80s have provided powerful tools for the study of invariant tori. However, for non-smooth systems, the applications of such theories are still limited. And the mechanisms of tori destructions should be investigated more deeply in such systems. Based on these problems, the existence of invariant tori and its destruction mechanisms for some non-smooth systems are presented in this dissertation. The specific works of this dissertation are as follows:

Firstly, we briefly recall the history of KAM theory, Aubry-Mather theory and its applications in one-degree-of-freedom systems. We also summarise the main research results.

Being prepared for the subsequent studies, we introduce the definition of twist map and several twist map theorems, including the Moser's twist theorem, Moser's small twist theorem, and the Aubry-Mather theorem. The connection between the nearly integrable twist map and the nearly integrable Hamiltonian system is explained. The usual transformations in Hamiltonian systems are summarised, since these transformations are crucial for turning a system with nearly integrable dynamics into an explicit nearly integrable system.

We first study the global dynamics of the inverted pendulum with impacts. When there is no exciting force, the phase space can be parted into three regions. With small exciting force, we show that the invariant tori exist in all these regions. Moreover, independent of the size of exciting force, the invariant tori near infinity always persist. At last, we design the numerical algorithm to calculate the invariant manifold under the effect of impact. We find that, using this algorithm, the destruction of tori in the low speed regions is due to the large expands of invariant manifolds of the saddle point.

We investigate the existence of invariant tori and escaping orbits for breathing circle billiard under different smoothness conditions. When the system is one of C^7 class, we establish the twist map in high energy region, and prove the existence of invariant tori near infinity by Moser's small twist theorem. When the system is piecewise smooth,

we derive the normal form near the singularities in detail. Under suitable parameter, the main term of this normal form has an acceleration periodic orbit. We use the non-resonance condition to ensure its stability under perturbations, which implies the existence of escaping orbits and the destruction of invariant tori in high energy region when the smoothness of system is lost.

Based on variational method, we study the existence of Aubry-Mather sets for breathing circle billiard when the system is only differentiable. First we explain the connection between the discrete variational problem and the solution of system. Then, under suitable assumptions about generating function, we establish the Aubry-Mather theory in the small twist case when the variational space has boundary. Such theory ensures that for arbitrarily small rotation number, the variational problem has its corresponding minimal configuration. At last, we show the generating function of breathing circle billiard satisfies the required assumptions in suitable coordinate, which implies the existence of Aubry-Mather sets.

The previous contents are all about the non-smooth Hamiltonian system. Under the effect of dissipation, we study the excited oscillator with dry friction at last. First we give a formal definition of the phase map. Under reasonable assumptions, we prove that the phase map is a small perturbation of a circle rigid rotation. We use the glue technic in topology to show the existence of forward invariant torus. Moreover, we use the circle map theory and KAM theory to discuss the dynamics on the torus. Based on numerical method, we find that when the exciting force increases, the destruction of the torus is due to the presence of grazing orbit.

Key Words: invariant torus; twist map; billiard; KAM theory; Aubry-Mather theory; non-smooth system; torus destruction.

目 录

第一章 引言	1
1.1 KAM 理论与 Aubry-Mather 理论的发展简史	1
1.2 KAM 理论与 Aubry-Mather 理论在单自由度系统的研究现状	3
1.2.1 无穷远处的不变曲线与解的有界性	3
1.2.2 Aubry-Mather 集与混沌轨道	4
1.2.3 KAM 理论在其它系统中的应用	5
1.3 本文主要工作	6
第二章 扭转映射与 Hamilton 系统	7
2.1 Moser 扭转定理	7
2.2 Hamilton 系统中的常见变换	10
2.3 Aubry-Mather 理论	14
2.4 本章小结	15
第三章 双面碰撞倒摆的拟周期解及不变流形	16
3.1 引言	16
3.2 双面碰撞倒摆模型及本章主要结果	16
3.3 碰撞系统的等价系统及非光滑作用量-角变量变换	18
3.3.1 弹性碰撞系统的等价系统	19
3.3.2 非光滑作用量-角变量变换	20
3.4 区域 I 与 III 上的扭转映射	24
3.4.1 区域 I 上的约化	24
3.4.2 区域 III 上的约化	26
3.5 主要项的估计	28
3.6 碰撞系统不变流形计算的数值方法	33
3.7 数值计算: 拟周期解与不变流形	36
3.8 本章小结	40
第四章 呼吸圆台球的不变环面与逃逸轨道	42
4.1 引言	42
4.2 呼吸圆台球模型的角动量约化及本章主要结果	43
4.3 “停止墙壁”变换与作用量-角变量变换	45
4.4 高速区域的扭转映射	51

4.5 隐式碰撞映射及奇点附近的范式映射	56
4.6 逃逸轨道的存在性	66
4.7 数值结果	68
4.8 本章小结	71
第 五 章 呼吸圆台球的 Aubry-Mather 集	72
5.1 边值问题, 变分问题与生成函数	72
5.2 小扭转情形下的 Aubry-Mather 集	76
5.2.1 周期构型	77
5.2.2 极小周期序列的保序性	81
5.2.3 无理极小平衡构型的存在性	84
5.3 定理 5.2.1 在呼吸圆台球上的应用	88
5.4 本章小结	91
第 六 章 干摩擦振子的相位映射与正不变环面	92
6.1 引言	92
6.2 干摩擦振子模型, 相位映射与本章主要结果	92
6.3 定理 6.2.1 与定理 6.2.2 的证明	98
6.4 正不变环面上的动力学	103
6.5 共振, 魔鬼阶梯及环面的破坏	104
6.6 本章小结	108
总结和展望	109
致谢	110
参考文献	111
攻读博士学位期间发表的论文和参加科研项目情况	121

第一章 引言

“Newton 的基本发现, 他本人认为需要保密, 所以只用字谜的形式发表, 这就是: *Data aequatione quocunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*. 用现代数学语言来说, 它的意思就是: 解微分方程是有用处的.”^[6]

1.1 KAM 理论与 Aubry-Mather 理论的发展简史

在十七世纪, 牛顿利用动量守恒与角动量守恒得到了二体问题的解, 这成功地解释了前人的天文观察以及开普勒三定律. 后来数学家与力学家们逐渐发现, 对于非线性的力学系统, 足够多的守恒量是得到显式解的一个必要条件. 例如, 对于刚体定点运动, 当无外力时角动量的三个分量都是守恒的, 利用这一点可得到任意初值下的解. 但如果在重力场的作用下, 由于只有能量与铅直方向的角动量这两个量守恒, 一般情形下的重刚体问题便无法得到显式解. 如果刚体是均质的绕某个轴旋转的旋转体, 且刚体的固定点过此轴, 则角动量在此轴的投影也是守恒的, 此时附加的这个守恒量使得总守恒量变成三个, 这种情形下刚体运动仍能求解. 关于刚体定点运动的详细讨论, 可参见 [4].

在微分方程理论中, 守恒量又称作是首次积分. 一般地, 一个 n 自由度的力学系统需要 n 个相互独立的首次积分才能显式地得到解^[4], 这类系统称作是可积系统. 对于可积系统, 除了在分界面上的解, 所有的解都位于相空间上的 n 维环面 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上, 流在环面上的限制为线性流: $\dot{\theta}_i = \omega_i$, 其中 $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 为环面上的一组坐标, $1 \leq i \leq n$, ω_i 为常数. 矢量 $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 称作是环面的频率矢量. 对于非线性系统, 频率矢量与解的“振幅”是相关的, 且频率矢量对环面上的动力学有着本质的影响. 一般地, 频率矢量可划分为共振频率矢量, Diophantine 频率矢量与 Liouville 频率矢量^[48].

一个自然的问题是: 可积系统的小扰动是否仍是可积的? Poincaré 首先给出了一个否定的回答: 即具有共振频率矢量的环面可以被任意小的扰动破坏. 如同有理数在实轴上稠密一样, 共振频率矢量在频率空间中也是稠密的. 因此在早期许多人认为: 存在任意小的扰动可使能量面上的动力学由可积变为遍历. 环面存在性的一个本质问题是小分母问题, 这一问题在其他的动力学问题中也经常出现, 如圆周映射的光滑共轭问题^[5], 平面系统椭圆平衡点附近的矢量场的光滑共轭问题^[5, 82] 等等. 在二十世纪四十年代, Siegel^[97] 首次在平面解析映射的光滑共轭问题上处理了小分母问题. Kolmogorov^[50] 在 1954 年提出了在近可积 Hamilton 系统中 Diophantine 频率矢量的环面保持性的证明框架, 其核心思想是用逐步改进的辛变换克服小分母问题, 这一方法也被称作是改进的牛

顿迭代法. Arnold^[2] 利用 Kolmogorov 的思路成功地解决了圆周映射的解析共轭问题, 并给出了 Kolmogorov 所给框架的严格证明^[3]. Moser^[80] 关于近可积单调扭转映射的结果将解析条件降到了有限可微条件. 上述处理小分母问题的方法以及相关结果, 如今以 KAM 理论为名. 继三人的工作以后, Rüssmann^[94], Herman^[44] 等学者对 KAM 理论的光滑性条件与非退化条件作了进一步的弱化. KAM 理论的综述文献可参见 [13, 23], KAM 理论关于 Hamilton 系统以及扭转映射的证明可参考文献 [48, 65, 95].

KAM 理论回答了可积 Hamilton 系统中具有 Diophantine 频率矢量的环面在小扰动下的保持性问题. 一个自然的问题是其余的环面在扰动以后变成了什么. 上世纪八十年代, Mather^[73] 与 Aubry^[7] 分别独立地运用变分原理对这一问题作了回答, 他们处理的系统分别为保面积单调扭转映射与凝聚态物理中的 Frenkel-Kontorova 模型. 如今他们的结果被称作 Aubry-Mather 理论. Aubry-Mather 理论仅仅需要扭转映射具有 C^0 类的光滑性, 因此其在一定程度上描述了扭转映射在较低光滑性条件下的动力学. 根据 Aubry-Mather 理论^[8], 破坏后的环面仍然以一些不变集的形式保留下来, 称为 Aubry-Mather 集. Aubry-Mather 集的一个重要特征是在其在圆周上的投影具有圆周同胚的序结构. 因此可自然地定义 Aubry-Mather 集的旋转数. 如果旋转数为无理数, Aubry-Mather 集可能为 (同伦非平凡的) 不变曲线也可能为 Cantor 集; 如果旋转数为有理数 p/q (p, q 为互素的整数), Aubry-Mather 集为保序的 (p, q) 周期轨道以及这类周期轨道之间的同异宿连接. 关于 Aubry-Mather 理论与单自由度 Hamilton 系统的直接联系, 可参见 [84], 该理论的综述, 推广以及扩展可参见 [41, 47].

旋转数为 p/q 的 Aubry-Mather 集通常是双曲的 (p, q) 周期轨道 [84, Theorem 2.3.4]. 不变曲线的不存在性与双曲周期轨道同异宿轨道的横截相交密切相关^[19]. 如果有理数 p/q 相应的 Aubry-Mather 集不是不变曲线, 则存在一个不变集使得扭转映射在此不变集上半共轭于符号动力系统^[35], 并且还可能存在非保序的 (p, q) 周期轨道^[11]. Mather^[76] 利用变分方法得到了不变曲线存在的充要条件. 在文献 [74] 中, Mather 利用不变曲线都为圆周上的 Lipschitz 函数这一性质 (Birkhoff 定理^[78]), 给出了一个较容易验证的不变曲线不存在的充分条件. 结合 Forni^[35] 的结果, 这个条件给出了系统存在混沌不变集的一个严格判据. 利用此条件, Mather 证明了在一定的参数条件下, 标准映射不存在不变曲线^[75], 以及具有零曲率的凸台球不存在不变曲线^[74].

当可积扭转映射的扰动过大时, 不变曲线可能会全部破坏, 参见 [75]. 不变曲线破坏的另一个诱因是扭转映射光滑性的丧失. Takens^[99] 首先构造了一个 C^1 的近可积扭转映射, 其不存在不变曲线. 这一结果被 Herman^[44] 改进到 C^r ($r < 3$). 对于实际的力学系统, Zharnitsky^[114] 证明了当 Fermi-Ulam 模型的墙壁运动是分段光滑时, Fermi-

Ulam 模型会出现无界轨道. 类似的 C^0 类光滑性会导致不变曲线全部破坏的现象也出现在半圆外台球^[29] 以及呼吸圆台球模型中^[111]. Marò^[69] 在弹跳球模型中构造了一类 C^1 类的周期函数, 此函数的 C^1 范数是较大的, 如果墙壁以此函数作为运动模式, 则系统能量趋于无穷的轨道, 即无穷远处不存在不变曲线.

1.2 KAM 理论与 Aubry-Mather 理论在单自由度系统的研究现状

KAM 理论中关于扭转映射的结果以及 Aubry-Mather 理论为研究单自由度非自治 Hamilton 系统提供了强大的理论工具. 例如, 目前已知的这类系统解的有界性证明都用到了 KAM 理论, 这类系统中大量存在的拟周期解以及次谐周期解也都可用这两个理论进行分析解释. 下面简要介绍这两种理论在单自由度系统的研究结果及现状.

1.2.1 无穷远处的不变曲线与解的有界性

Littlewood 提出了 Duffing 型方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t) \quad (1-1)$$

解的有界性问题, 其中当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $g(x)/x \rightarrow \infty$, $p(t)$ 为一个周期函数. 满足上述条件的方程 (1-1) 又称为超线性微分方程. Littlewood^[66] 构造了一个具有无界解的例子. Morris^[79] 首先利用 KAM 理论研究了一类特殊的 Duffing 型方程, 当外激励为分段光滑的周期函数时, Morris 利用 Moser 扭转定理证明了该系统所有解的有界性. Morris 的结果被 Dieckerhoff, Zehnder^[27], Levi^[64] 等学者推广到更一般的超线性微分方程, 且仅要求外激励是连续的周期函数. 此类超线性微分方程最主要的特征是未扰系统的周期解的周期随着其能量趋于无穷而趋于零, 系统在无穷远处的动力学为一个近可积的小扭转映射. 更详细的解释可参考文献 [64, pp.46-55]. 除了超线性微分方程, 对于单摆类的微分方程也有类似的结果^[63, 108].

对于方程 (1-1), 如果当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $g(x)/x$ 分别趋于两个大于 0 的常数, 则称其为次线性微分方程. 与超线性微分方程有所不同, 未扰系统的周期解的周期随着其能量趋于无穷而趋于某个大于 0 的常数. 在这种情形下, 如果外激励的周期与此常数成倍数, 那么共振有可能导致系统无界轨道的存在性, 从而无穷远处不存在不变曲线. Ortega^[88] 首先研究了此类系统的一个非光滑情况: 不对称的分段线性振子. 当外激励接近于一个

常数, Ortega 证明了该系统所有解的有界性. Ortega 关于分段线性系统的结果 [1, 89] 更深刻地刻画了此类系统解的有界性: 当某个非共振条件满足, 则系统所有解都是有界的, 否则存在无界解. Ortega 的结果对于线性碰撞振子^[90] 也是成立的. 柳彬^[67] 考虑了更一般的次线性微分方程, 利用作用量-角变量, 证明了光滑的次线性微分方程与分段线性系统具有类似的性质.

Fermi-Ulam 模型是 Fermi^[33] 为了描述高能粒子在地球与大气层之间磁场作用下的运动所提出的, 后来 Ulam^[103] 将这一模型简化为一个质点在固定墙壁与周期运动墙壁之间的自由运动. 限于当时计算机的运算速度, Ulam 采用了分段光滑的周期函数作为墙壁的运动模式. 数值上发现, 对于某些初值, 质点的能量有显著的增大. 因此 Ulam 猜测对于这类模型无界轨道可能普遍存在. Laederich 和 Levi^[59] 利用 Moser 扭转定理证明了当墙壁的运动充分光滑时, Fermi-Ulam 模型所有的解都具有有界能量. Zharnitsky^[114] 证明了墙壁运动分段光滑时无界轨道的存在性, 这给出了早期数值实验的理论解释. 在文献 [113, 115] 中, Zharnitsky 总结了处理这类碰撞问题的一般性方法, 其适用于台球, 外台球以及 Fermi-Ulam 模型.

1.2.2 Aubry-Mather 集与混沌轨道

由微分方程得到的扭转映射大多不符合 Aubry-Mather 理论的框架^[9, 73], 因此 Aubry-Mather 理论在实际系统上的应用往往需要额外的处理. 根据 Ortega 的方法 [88, Section 5], 可在两条不变曲线之间 (这两条不变曲线通常由 Moser 扭转定理所得, 其频率满足 Diophantine 条件) 构造一个标准的保边界保面积且单调扭转的映射. 因此, 根据 Aubry-Mather 理论, 次谐轨道以及任意无理数相应的广义拟周期轨道都存在. 故可以粗略地说, 如果 Moser 扭转定理可以使用, Aubry-Mather 理论的结论也部分地成立. 但由于 Aubry-Mather 理论所要求的光滑性较 KAM 理论低, 上述处理并不是最优的. 有许多文献对微分方程在较低光滑性条件下建立了扭转映射, 且验证了单调扭转条件, 但由于得到的扭转映射不是保持边界的, 严格意义下, Aubry-Mather 理论是无法应用的.

对于扭转映射, 当作用量趋于无穷扭转也趋于无穷时, 可利用极小轨道具有旋转数这一性质来限制轨道的增长. 由于扭转是趋于无穷的, 这种限制即足以保证极小轨道落在变分空间的内部. 弹跳球模型是这类系统的一个典型例子, 文献 [68] 给出了具体的处理细节. 另外一类情形的处理要困难一些, 即作用量趋于无穷而扭转趋于某个有限值. 超线性微分方程, 次线性微分方程, 线性碰撞振子以及 Fermi-Ulam 模型都属于这类情形. 在这种情形下, 极小轨道具有旋转数这一性质便不足使得其落在变分空间的内部.

虽然针对的是具有非周期外激励的系统, Ortega 与 Kunze 的系列工作^[56-58] 给了处理这类问题的一个思路. 曹振邦等^[16] 利用 Ortega 与 Kunze 的思路证明了在 C^2 光滑性条件下 Fermi-Ulam 模型中 Aubry-Mather 集的存在性.

在研究扭转映射工作中时, 除了寻找 Mather 的不变曲线不存在判据之外^[74], 还有构造经典马蹄来确定混沌轨道的存在性, 例如对于简化的弹跳球模型即可构造马蹄^[104]; 或当系统存在双曲周期点与同宿异宿轨道时, Melnikov 方法也可用来证明混沌轨道存在^[98]. Mather^[77] 证明了可积单调扭转映射中具有 Liouville 频率的不变曲线可被任意小的扰动所破坏. 但对于实际的问题, 往往还需要 Mather 判据才能严格断定不变曲线不存在. 关于不变曲线的不存在性研究方面, 在早期有 Mather 关于标准映射^[75], 台球^[74] 以及 Boyland 关于外台球^[10] 的工作. 由于大多数由微分方程得到的扭转映射都是隐式的, 近几年由于 Mather 不变曲线不存在判据, 扭转映射才在实际力学系统中有了应用. 具体细节可参考 Marò 等人关于弹跳球^[71] 以及呼吸圆台球^[12] 的工作.

1.2.3 KAM 理论在其它系统中的应用

以上提到的理论及应用都属于 Hamilton 系统 (扭转映射可看作是离散的 Hamilton 系统) 的范畴, 下面简要介绍一些 KAM 理论在其它系统应用方面的工作.

对于非 Hamilton 系统, KAM 理论往往处理的是不变环面上的流与线性流的光滑共轭问题, 而非不变环面的存在性问题. 一般地, 不变环面的存在性是由系统在具有环绕性质的区域的双曲性所保证. 例如如果一个自治系统存在双曲的极限环, 则在小的周期激励下, 不变环面存在性由此极限环的双曲性保证^[20, 43]; 证明经过超临界 NS 分岔后形成的吸引不变圈的存在性^[106] 用到了压缩映射原理而非处理小分母问题的牛顿迭代法. Moser^[81] 首先考虑了具有可逆 (Reversible) 性质的 Duffing 方程的拟周期激励扰动问题. 在 Diophantine 条件下, Moser 证明了系统拟周期解的存在性. 前面所叙述的关于无穷远处不变环面的存在性结果, 对于一些可逆系统^[53] 也是成立的. Celletti 和 Chierchia^[17] 考虑了卫星在开普勒轨道上运行的模型: Spin-Orbit 模型, 此模型考虑了卫星运行时的耗散并引入了外激励项. 在无外激励时, Spin-Orbit 模型存在一条吸引的周期轨道. 当系统具有小周期激励扰动时, Celletti 和 Chierchia 在 Diophantine 条件下证明了系统吸引不变环面的存在性, 且限制在此环面上, 系统的流光滑共轭于环面上通常的线性流. 类似的结果也出现在耗散标准映射中^[18]. 更多关于 KAM 理论在耗散系统中的应用方面工作, 可参见综述文献 [22].

1.3 本文主要工作

本文的主要工作是:

- (1) 研究了受激双面碰撞倒摆的全局动力学. 当存在外激励扰动时, 证明了系统低速区域与高速区域不变环面的存在性, 且高速区域环面的存在性与外激励的扰动大小无关. 设计了计算带有碰撞效应的不变流形的数值算法, 并发现低速区域环面的破坏与鞍点不变流形的大范围缠结有关.
- (2) 在不同的光滑性条件下, 分别利用 KAM 理论, 奇点附近的范式映射以及 Aubry-Mather 理论研究了呼吸圆台球, 并证明了系统不变环面, 无界轨道以及 Aubry-Mather 集的存在性.
- (3) 在合适的假设下, 证明了带有干摩擦力的单自由度强迫振动系统正不变环面的存在性, 并在数值上分析了该系统环面的破坏机理.

除本章外, 本文第二章简要介绍了 Moser 扭转定理, Aubry-Mather 理论, 并总结了处理 Hamilton 系统时较常见的变换, 本文中的一部分结果基于这些内容.

本文第三章研究了双面碰撞倒摆的全局动力学. 以摆的同宿轨道为分界线, 分别利用非光滑作用量-角变量变换以及碰撞系统的等价形式建立了低速区域与高速区域的扭转映射. 本章还设计了针对碰撞系统的不变流形的数值算法. 将此算法应用到双面碰撞倒摆, 数值地研究了低速区域不变流形的缠结与环面破坏之间的联系.

第四章至第五章研究呼吸圆台球模型在不同光滑性条件下的动力学性态. 第四章研究呼吸圆台球角动量约化后的新 Fermi-Ulam 模型. 当半径函数是 C^7 类的周期函数, 证明了该系统无穷远处的不变曲线存在性. 这一结果蕴含了呼吸圆台球所有解的有界性, 并给出了 Kamphorst 与 de Carvalho^[49] 的结果的一个不同的证明. 当呼吸圆台球的半径函数分段光滑时, 证明了系统逃逸轨道的存在性, 因此解的有界性这一结果不再成立. 本章详细给出了在奇点附近范式映射的计算步骤, 并讨论了逃逸轨道存在的机理. 特别地, 本章给出了一个新的因光滑性丧失而导致逃逸轨道存在的力学系统. 第五章考虑在 Aubry-Mather 理论所要求的最低光滑性条件下呼吸圆台球 Aubry-Mather 集的存在性. 基于文献 [9, 58] 的思路, 本章完整地给出了处理这类小扭转问题的理论细节, 并将该理论具体地应用到了呼吸圆台球模型.

第六章考虑带有干摩擦力及外激励的振子. 在适当的假设下, 本章证明了相位映射的光滑性以及不变环面的存在性. 利用 KAM 理论在圆周映射方面的结果解释了不变环面上的动力学. 并且数值上探讨了外激励扰动变大时系统不变环面的破坏.

第二章 扭转映射与 Hamilton 系统

本章首先介绍扭转映射的定义以及 Moser 扭转定理, 并讨论了近可积扭转映射与近可积 Hamilton 系统之间的联系. 为了给后续的章节作准备, 本章总结了 Hamilton 系统中常见的一些变换, 这些变换对于将一些非光滑系统处理成近可积 Hamilton 系统是关键. 最后, 介绍了单调扭转映射的 Aubry-Mather 理论.

2.1 Moser 扭转定理

当涉及到不同的理论或定理时, 如 KAM 理论^[82], Poincaré-Birkhoff 不动点定理^[14], Aubry-Mather 理论^[8, 73] 等, 扭转映射的基本定义都略有不同. 为了在本文中统一, 我们选定其中一个定义.

定义 2.1.1. 设 $[a, b]$ 为一非空闭区间, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为圆周. 映射

$$f : S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

称为扭转映射, 如果 f 为从 $S^1 \times [a, b]$ 到 $f(S^1 \times [a, b])$ 的保向同胚, 且 f 满足图交性质:

若 γ 为 $S^1 \times [a, b]$ 中一条同伦非平凡的闭曲线, 则 γ 与 $f(\gamma)$ 之交非空,

这里同伦非平凡的闭曲线指的是不可连续地收缩成一点的闭曲线, 严格的定义可参见 [85].

定义 2.1.2. 设 $(\theta, r) \in S^1 \times [a, b]$, 如果扭转映射 $f : S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ 的形式为

$$\begin{cases} \theta' = \theta + \alpha(r), \\ r' = r, \end{cases}$$

其中 α 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则称 f 为可积扭转映射.

可积扭转映射的动力学是清晰的: 对每个 $r^* \in [a, b]$, 曲线 $\{(\theta, r) : r = r^*\}$ 是不变曲线, 且 f 限制在此曲线上为圆周上的平移: $\theta \mapsto \theta + \alpha(r^*)$ (称 $\alpha(r^*)$ 为此不变曲线的频率). 一般地, 若一个扭转映射为一个可积扭转映射的小扰动, 则称其为近可积扭转映射. 著名的 Moser 扭转定理断定: 对于充分光滑的可积扭转映射 f , 且 f 的扭转是单调

的 (即函数 α 是严格单调递增的), 那么具有 Diophantine 频率的不变曲线在充分光滑的小扰动下仍然是不变曲线. 在给出 Moser 扭转定理的完整叙述之前, 需要介绍函数的范数这一概念.

定义 2.1.3. 设 $k \geq 0$ 为整数. 考虑 C^k 类函数 $g: S^1 \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $(\theta, r) \in S^1 \times [a, b]$. 定义

$$|g|_{C^k} = \max_{\substack{(\theta, r) \in S^1 \times [a, b] \\ 0 \leq m+n \leq k}} \left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial \theta^m \partial r^n} g(\theta, r) \right|,$$

其中 $m, n \geq 0$ 为整数, 称 $|g|_{C^k}$ 为 g 在 $S^1 \times [a, b]$ 上的 C^k 函数类范数.

注 2.1.1. 以上的函数范数定义并不局限于区域 $S^1 \times [a, b]$, 对于定义在其他的区域的 k 阶可微函数, 其 C^k 函数类范数的定义是类似的. 在本文中, 当函数 g 的定义域确定后, $|g|_{C^k}$ 即为 g 在其定义域上的 C^k 函数类范数.

定理 2.1.1 (Moser 扭转定理^[44, 80, 82]). 设 $f: S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ 为扭转映射, f 的表达式如下:

$$\begin{cases} \theta' = \theta + \alpha(r) + g_1(\theta, r), \\ r' = r + g_2(\theta, r). \end{cases}$$

其中 α, g_1, g_2 分别为 S^1 及 $S^1 \times [a, b]$ 上的 C^k 类 ($k > 3$) 函数, $\alpha'(r) \geq \delta > 0$ (δ 为常数). 则存在 $\epsilon_0 > 0$, 当 $|g_1|_{C^k}, |g_2|_{C^k} < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, 存在如下形式的 f -不变曲线:

$$r = c + u(\xi), \quad \theta = \xi + v(\xi)$$

使得 f 限制在此曲线上为映射 $\xi \mapsto \xi + \omega$, 其中 $c \in (a, b)$ 为常数, u, v 为 1-周期可微函数, $\omega \in [\alpha(a), \alpha(b)]$ 为无理数且满足 Diophantine 条件:

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma q^{-\tau}$$

对所有的整数 q, p 成立, 其中 $q \neq 0$, γ, τ 为与 ϵ 相关的常数. 并且, 对任意的满足上述 Diophantine 条件的 $\omega \in [\alpha(a), \alpha(b)]$, 以 ω 为频率的不变曲线都存在; 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 不变曲线的测度趋于 $S^1 \times [a, b]$ 的全测度.

注 2.1.2. 如果 f 的形式为

$$\begin{cases} \theta' = \theta + \epsilon r + m_1(\theta, r, \epsilon), \\ r' = r + m_2(\theta, r, \epsilon). \end{cases}$$

其中对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $m_1(\cdot, \cdot, \epsilon), m_2(\cdot, \cdot, \epsilon)$ 都为 $S^1 \times [a, b]$ 上的 C^k 类 ($k > 3$) 函数, 且对 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ 有 $|m_1|_{C^k}, |m_2|_{C^k} < \epsilon^{1+\nu}$, 其中 $\nu > 0$ 为不依赖于 ϵ 的常数. 那么类似的定理仍成立, 文献中称作是 Moser 小扭转定理^[64].

以上关于可积扭转映射与近可积扭转映射的讨论与结果都属于离散动力系统的范畴. 第一章中, 本文已经初步介绍过连续系统的可积性概念, 下面给出严格的定义.

定义 2.1.4. 考虑 n 自由度的 Hamilton 系统

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q), \quad (2-1)$$

其中 $p \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $q \in \mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $H : U \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^2 类函数. 称系统 (2-1) 为可积 Hamilton 系统, 如果函数 H 仅与 p 相关, 即存在 C^2 类函数 $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $H(p, q) = h(p)$; 称系统 (2-1) 为近可积 Hamilton 系统, 如果 $H(p, q) = h(p) + h_1(p, q, t)$, 其中 $h_1 : U \times \mathbb{T}^n \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^2 类函数, 且其 C^2 类范数小于某个小量 $\epsilon > 0$.

可积系统的不变环面在小扰动下的保持性称为 Kolmogorov 定理或者 KAM 定理, 其完整叙述可参见文献 [48]. 为了解释近可积 Hamilton 系统与近可积扭转映射的关系, 在这里考虑一个典型的例子, 许多系统均可以化简成此范例. 考虑 $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ 上的 Hamilton 函数:

$$H(I, \theta, t) = h(I) + h_1(I, \theta, t),$$

其中 H, h, h_1 为 C^4 类的函数, $h'(I), h''(I) \geq \delta > 0$ 对 I 充分大时成立, h_1 的 C^4 范数为小量. 通常的 Hamilton 系统需要做作用量-角变量变换才可得到上述 Hamilton 函数. H 相应的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{I} = -\partial h_1 / \partial \theta, \\ \dot{\theta} = h'(I) + \partial h_1 / \partial I. \end{cases} \quad (2-2)$$

当 I 充分大时, 系统 (2-2) 的不变环面的存在性可直接由近可积 Hamilton 系统的 KAM 定理^[48] 所保证. 但同样也可以用 Moser 扭转定理来说明不变环面的存在性. 在 I 充分大的区域取时间-1-映射 (即时间间隔为 1 的时间 Poincaré 映射, 也称作频闪映射), 可形式地得到

$$\begin{cases} I' = I + g_1(I, \theta), \\ \theta' = h'(I) + g_2(I, \theta). \end{cases}$$

由于 h_1 的各阶导数都很小, 根据解对初值的依赖性^[70], g_1, g_2 也是 C^4 类的且其各阶导数也是较小的, 而图交性质又是 Hamilton 系统时间截面映射的一条基本性质^[27], 故上述时间-1-映射满足 Moser 扭转定理的条件. 另一方面, Moser^[83] 证明了可从一个单调扭转映射 (具体定义见本章第 3 节) 构造 Hamilton 系统, 使得此 Hamilton 系统的时间-1-映射为此单调扭转映射, 因此扭转映射也称作是一类离散的 Hamilton 系统. 从下一小节介绍的 Aubry-Mather 理论可看出二者的形式甚至也有相似之处.

2.2 Hamilton 系统中的常见变换

上节已经说明如何从近可积 Hamilton 系统 (2-2) 得到一个近可积的扭转映射, 此扭转映射满足 Moser 扭转定理的条件. 但对于实际的系统, 特别是非光滑系统, 往往需要对方程作许多变换才能得到系统 (2-2) 的形式. 这些变换, 如作用量-角变量变换与尺度化变换等, 本质上依赖于 Hamilton 矢量场的几何性质. 下面在几何的意义下讨论这些变换.

为了叙述方便, 这里重新给出 n 自由度的 Hamilton 方程:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, t), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, t), \quad (2-3)$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}^n$, $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^2 类函数. Hamilton 系统的几何描述涉及到一个重要的概念, 称为积分不变量.

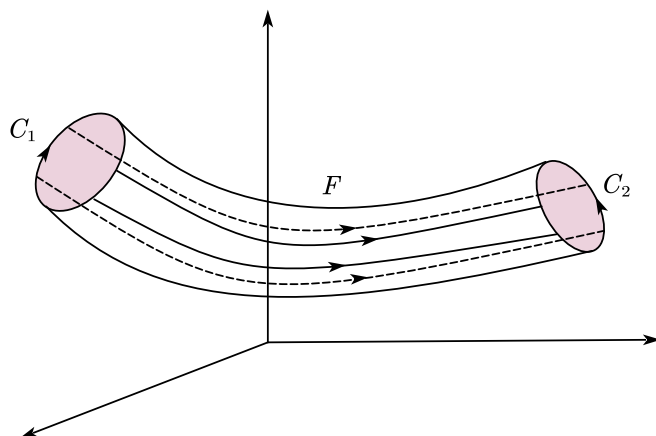
定义 2.2.1. 令 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 类函数 ($n \geq 3, 1 \leq i \leq n$), $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 矢量场. 设 $C_2 - C_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中定向柱面的边界, 此柱面由 F 的相轨线构成, 见图 2-1. 如果对于任意满足上述要求的 C_1, C_2 , 都有

$$\int_{C_1} \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i = \int_{C_2} \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i,$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则称 1-形式 $\sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ 为矢量场 F 的积分不变量.

关于微分形式以及外微分运算等概念, 可参见 [4, Chapter 7]. 下面的定理说明积分不变量是一个几何的概念. 沿用定义 2.2.1 中的记号, 有如下重要结论:

定理 2.2.1. ^[4] 1-形式 $\sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ 是矢量场 F 的积分不变量当且仅当矢量场 F 是

图 2-1 由 F 的相轨线构成的定向圆柱.

1-形式 $\sum_{i=1}^n g_i(x)dx_i$ 的核, 即:

$$d\left(\sum_{i=1}^n g_i(x)dx_i\right)(F(x), \cdot) = 0,$$

其中 d 为微分形式的外微分算子.

推论 2.2.1. ^[4] 1-形式 $\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt$ 是系统 (2-3) 的扩展矢量场的积分不变量.

证明: 系统 (2-3) 的扩展矢量场为

$$X = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}, 1\right).$$

对任意的 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, 直接计算可得

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt\right)(X, \xi) &= \sum_{i=1}^n \left(dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt \right)(X, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\begin{vmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q_i} & \xi_{i+n} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} & \xi_i \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \begin{vmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q_i} & \xi_{i+n} \\ 1 & \xi_{2n+1} \end{vmatrix} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} & \xi_i \\ 1 & \xi_{2n+1} \end{vmatrix} \right) = 0. \end{aligned}$$

由于 ξ 是任意的, 由定理 2.2.1 即得到结论. $\square$

1-形式 $\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt$ 称作是 Poincaré-Cartan 积分不变量. 为了书写方便, 常常忽略求和符号而将其记为 $pdq - Hdt$. 文献中或是教科书中常把上述推论称作是 Hamilton 矢量场的积分曲线与 Poincaré-Cartan 积分不变量联系的不变性. 这是由于外微分

算子是一个几何的概念, 所以等式

$$d(pdq - Hdt)(X, \cdot) = 0 \quad (2-4)$$

的成立与坐标的选择无关. 因此, Hamilton 矢量场在不同的坐标下完全由在此坐标下的积分不变量所确定. 故在不同的坐标下, 只需要关心 Poincaré-Cartan 积分不变量在不同坐标下的变化即可. 另外注意到由于式 (2-4) 中运算的线性性质, 积分不变量乘以某个常数不改变 Hamilton 矢量场的方向.

命题 2.2.1. ^[4] 假设映射 $\Phi : (p, q, t) \mapsto (P, Q, T)$ 为微分同胚, 其中 $(P, Q, T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, 且有

$$pdq - H(p, q, t)dt = PdQ - K(P, Q, T)dT + dS(P, Q, T),$$

其中 K, S 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上的函数. 则在坐标 (P, Q, T) 下, 方程 (2-3) 变为

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q}(P, Q, T), \quad \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P}(P, Q, T).$$

推论 2.2.2 (辛变换^[4]). 假设微分同胚 $\Phi : (p, q) \mapsto (P, Q)$ 是辛变换, 即

$$\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i,$$

则在坐标 (P, Q) 下, 方程 (2-3) 变为

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}(P, Q, t), \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}(P, Q, t),$$

其中 $K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$, $p(P, Q), q(P, Q)$ 由 Φ^{-1} 所确定.

最常用到的辛变换是作用量-角变量变换, 参见 [4] 或者本文第三, 四章. 另外一种变换 (称作是尺度化变换) 虽然不是辛变换, 但其仍然保持 Hamilton 系统的结构. 当需要提取系统的某个主要项而将其次要项当作扰动时, 尺度化变换通常是非常有效的. 由于尺度化变换在本文第三, 第四章均有所使用, 且其不在通常的教科书中出现, 在这里给出一个严格的叙述及证明.

命题 2.2.2 (尺度化变换). 取 $\epsilon \neq 0, \alpha, k_1, k_2, l_1, l_2$ 为常数, 且这些常数满足: $k_1 + k_2 =$

$l_1 + l_2 = \alpha$. 如果作变换 $(p, q, t) \mapsto (P, Q, T)$, 其中

$$\epsilon^{k_1} p = P, \quad \epsilon^{k_2} q = Q, \quad \epsilon^{l_2} t = T,$$

那么系统 (2-3) 在坐标 (P, Q, T) 下为新的 *Hamilton* 系统, 其广义动量, 广义坐标, *Hamilton* 量以及时间分别为 $(P, Q, \epsilon^{l_1} H, T)$.

证明: 函数 $H(p, q, t)$ 相应的 *Hamilton* 方程为方程 (2-3). 在新坐标 (P, Q) 以及新的时间 T 下, 此方程转变为

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dT} &= \frac{d(\epsilon^{k_1} p)}{d\epsilon^{l_2} t} = -\epsilon^{k_1-l_2} \frac{\partial H}{\partial q} = -\epsilon^{k_1+k_2-l_2} \frac{\partial H}{\partial Q} = -\epsilon^{l_1} \frac{\partial H}{\partial Q}, \\ \frac{dQ}{dT} &= \frac{d(\epsilon^{k_2} q)}{d\epsilon^{l_2} t} = \epsilon^{k_2-l_2} \frac{\partial H}{\partial p} = -\epsilon^{k_1+k_2-l_2} \frac{\partial H}{\partial P} = \epsilon^{l_1} \frac{\partial H}{\partial P}. \end{aligned}$$

而上述方程正是函数 $\epsilon^{l_1} H(p, q, t) = \epsilon^{l_1} H(P/\epsilon^{k_1}, Q/\epsilon^{k_2}, T/\epsilon^{l_2} t)$ 相应的 *Hamilton* 方程. $\square$

实际上, 上述命题的本质是由于 1-形式 $pdq - Hdt$ 乘以某个常数并不会改变其核:

$$\epsilon^\alpha (pdq - Hdt) = \epsilon^{k_1} p d(\epsilon^{k_2} q) - \epsilon^{l_1} H d(\epsilon^{l_2} t).$$

以下的变换具有将时间与广义坐标进行交换的作用. 同样地, 在这里给出严格叙述与证明.

推论 2.2.3 (时间与广义坐标的交换). 设 $n = 1$, 变换 $\Phi : (p, q, t) \mapsto (h, t, q)$ 是微分同胚, 其中 $h = H(p, q, t)$. 那么在坐标 (h, t, q) 下, 系统 (2-3) 仍为 *Hamilton* 系统, 此时新坐标下的广义动量, 广义坐标, *Hamilton* 量以及时间分别为 (h, t, p, q) , 其中 $p = p(h, t, q)$, p 的表达式由 Φ^{-1} 所确定.

证明: 首先运用尺度化变换. 取 $\epsilon = -1, k_1 = l_1 = 1, k_2 = l_2 = 0$. 我们有

$$-(pdq - Hdt) = -pdq + Hdt.$$

此时系统的广义动量, 广义坐标, *Hamilton* 量以及时间分别为 $(-p, q, -H, t)$. 而在变换 Φ 下, 有

$$-pdq + Hdt = hdt - pdq.$$

由命题 2.2.1 即得到结论. $\square$

本文对 Hamilton 系统的处理均在上述变换的范围内. 由于上述变换均联系着 $pdq-Hdt$, 在之后的章节中仅在不同的坐标下写出积分不变量, 而不再提及具体用到了哪类变换.

2.3 Aubry-Mather 理论

一般地, 考虑提升以后的扭转映射对于理论的叙述是方便的^[73]. 考虑保面积扭转映射 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (\theta', r')$, $\forall (\theta, r) \in \mathbb{R}^2$, $f(\theta + 1, r) = (\theta' + 1, r')$, f 满足单调扭转条件: $\partial\theta'/\partial r \geq \delta > 0$, 其中 δ 为一个常数. 满足以上条件的扭转映射也称之为单调扭转映射.

首先说明一个重要事实: 给定 $(\theta, \theta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (r, r') 唯一地由 (θ, θ') 确定. 实际上, 由单调扭转条件, $f(\{\theta\} \times \mathbb{R})$ 与平面上的直线 $\{\theta = \theta'\}$ 有唯一的交点 (θ', r') , 故 r' 可由 (θ, θ') 唯一确定. 再从逆映射 f^{-1} 确定 r , (r, r') 即唯一确定. 记 $r = r(\theta, \theta')$, $r' = r'(\theta, \theta')$. 由于 $\det(df) \equiv 1$, 那么有

$$d(r(\theta, \theta')d\theta - r'(\theta, \theta')d\theta') = dr \wedge d\theta - dr' \wedge d\theta' = 0.$$

由于 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是单连通的, 故存在 C^2 类函数 $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得:

$$dh(\theta, \theta') = r d\theta - r' d\theta' \text{ 且 } h(\theta + 1, \theta' + 1) = h(\theta, \theta').$$

h 称作是扭转映射 f 的生成函数. 上述论述更精确的叙述可参见 [73]. 基于以上的讨论, 有

$$f(\theta, r) = (\theta', r') \Leftrightarrow \begin{cases} r = h_1(\theta, \theta'), \\ r' = -h_2(\theta, \theta'), \end{cases}$$

其中 h_i ($i = 1, 2$) 为 h 关于第 i 个变量的偏导. 上述方程与 Hamilton 方程组的相似之处也是扭转映射被称作是一类离散 Hamilton 系统的原因之一.

生成函数 h 被称作离散问题的作用量, 具体原因如下. 对于 $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义函数

$$H(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h(\theta_i, \theta_{i+1}).$$

如果固定 θ_1, θ_n , 对任意的 $(\theta_2^*, \dots, \theta_{n-1}^*) \in \mathbb{R}^{n-2}$ 都有

$$H(\theta_1, \dots, \theta_n) \leq H(\theta_1, \theta_2^*, \dots, \theta_{n-1}^*, \theta_n),$$

称 $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 是极小的. 如果 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的任意子段都是极小的, 称 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 是极小构型. 另外, 对于 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 若对任意的 $i \in \mathbb{Z}$ 有

$$h_2(\theta_{i-1}, \theta_i) + h_1(\theta_i, \theta_{i+1}) = 0,$$

称 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 是平衡构型. 不难看出, 极小构型都为平衡构型. 综合地有:

$$\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ 是平衡构型} \Leftrightarrow f(\theta_i, r_i) = (\theta_{i+1}, r_{i+1}),$$

其中 $r_i = h_1(\theta_i, \theta_{i+1})$.

极小构型 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的一个重要性质是其可以作为某个圆周同胚的一条轨道^[8], 从而极小构型的旋转数这一定义:

$$\rho(\theta) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\theta_i}{i}$$

是有意义的, 其中 $\theta = \{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 为极小构型. 关于圆周同胚以及旋转数等相关概念, 可参见 [105, 112].

定理 2.3.1 (Aubry-Mather 定理^[7, 8, 73]). 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在以 α 为旋转数的极小构型. 当 $\alpha = p/q$ 时 (p, q 为互素的整数, $q \neq 0$), 存在极小构型 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 使得 $\theta_{i+q} = \theta_i + p$ 对任意的 i 均成立; 当 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 以 α 为旋转数的极小构型 $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的闭包 (这里将极小构型作为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的子集) 为整个圆周或是圆周上的 Cantor 集.

注 2.3.1. 文献 [8] 直接从生成函数出发来研究极小构型, 在合适的假设下, 生成函数甚至只需要具有连续性即可保证极小构型的存在性. 本文第五章也是基于类似的思路.

2.4 本章小结

本章介绍了本文中最常用到的理论框架: 几类扭转映射定理及 Hamilton 系统的几何性质; 详细地叙述了 KAM 理论中关于扭转映射的结果, 以及其与近可积 Hamilton 系统之间的联系; 总结了依赖 Hamilton 系统的几何性质的几类常见变换, 并给出了文献中常出现的尺度化变换以及时间与坐标交换变换的证明; 最后, 介绍了单调扭转映射的 Aubry-Mather 理论.

第三章 双面碰撞倒摆的拟周期解及不变流形

3.1 引言

单摆是最经典的非线性系统之一. 在周期激励下, 单摆的全局动力学分析往往需要借助现代动力系统的分析手段, 例如 KAM 理论^[63, 108], Melnikov 方法^[31, 32], 以及变分方法^[72, 84] 等. 关于单摆动力学的全局分析, 可参见综述文献 [72].

近年来, 由于非光滑系统受到了广泛关注 (例如可参见文献 [28, 100, 101, 107, 109]), 双面碰撞倒摆模型也引了众多学者的关注. Chow 与 Shaw^[21] 研究了该模型的一个线性化系统, 分析了系统的次谐轨道以及分岔. Shaw 与 Rand^[96] 使用 Melnikov 方法研究了该系统混沌轨道的存在性. 杜正东与张伟年^[32] 用 Melnikov 方法研究了一般性的碰撞非线性振子, 并给出了 n -阶 Melnikov 函数的计算方法. 近年来关于双面碰撞倒摆的研究, 可参见 [31, 39, 42, 102].

上述关于双面碰撞倒摆的工作大多数基于 Melnikov 方法, 得到的结论是次谐轨道以及混沌轨道的存在性. 本文考虑 KAM 理论在此非光滑系统中的应用. 启发于 Zhar-nitsky^[116] 处理平面凸台球的技巧, 本章在适当的假设下将双面碰撞倒摆相空间中的几个区域约化为一个近可积的单调扭转映射. 运用 Moser 扭转定理与 Moser 小扭转定理, 得到了系统在低速以及高速区域不变环面的存在性. 文献 [116] 处理这类碰撞问题时假设未扰系统及扰动量是解析的, 在本章中对这一限制作了适当的处理使得未扰系统及扰动量是 C^5 类的光滑性即可. 通过数值计算验证了低速及高速区域不变环面的存在性. 除此以外, 本章还给出了计算低速与高速区域之间扰动不变流形的数值算法, 并利用此方法探究了系统低速区域环面破坏的机理.

3.2 双面碰撞倒摆模型及本章主要结果

考虑双面碰撞倒摆如图 3-1 所示. 该模型可由如下二阶微分方程描述:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{g}{l} \sin x - V_x(x, t),\end{aligned}\tag{3-1}$$

其中 $(x, y) \in [-\xi, \xi] \times \mathbb{R}$, $0 < \xi < \pi/2$, g 为重力加速度, l 为杆长, $V : [-\xi, \xi] \times S^1$ 是 C^r ($r \geq 5$) 类函数. $V_x(x, t)$ 在方程中可看作是一个一般的扰动项. 假设当球与墙壁的碰撞是完全弹性的, 即当 $|x| = \xi$ 时 $y \rightarrow -y$. 不失一般性, 在本章中始终假设 $g/l = 1$.

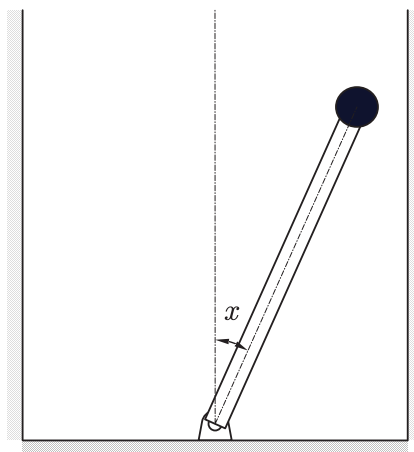
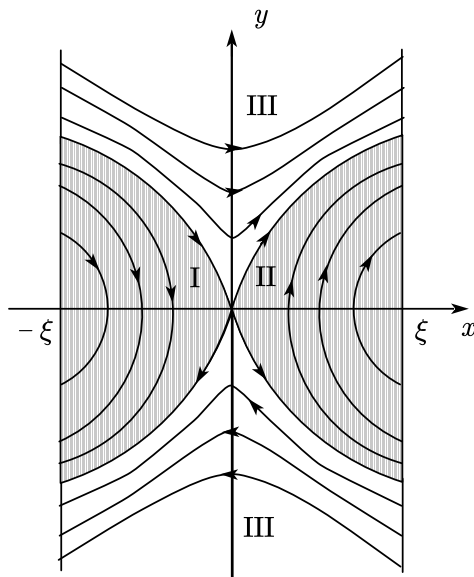


图 3-1 双面碰撞倒摆模型.

系统 (3-1) 的 Hamilton 量为

$$H(y, x, t) = \frac{1}{2}y^2 + \cos x + V(x, t).$$

当 $V(x, t) = 0$, 系统为保守系统, 等能集 $\{(x, y) : \frac{1}{2}y^2 + \cos x = h\}$ 的结构是清晰的, 见图 3-2. 定义如下区域:

图 3-2 $V = 0$ 时系统 (3-1) 的相图.

$$\begin{aligned} \text{I} &:= \{(x, y) : \cos \xi < h < 1 \quad -\xi < x < 0\}, \\ \text{II} &:= \{(x, y) : \cos \xi < h < 1 \quad \xi > x > 0\}, \\ \text{III} &:= \{(x, y) : h > 1, -\xi < x < \xi\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{aligned}} \right\} \rightarrow \text{低速区域}$$

高速区域.

从图 3-2 可以看到, 区域 I 与 II 的相图近似于一个单面碰撞的非线性振子, 区域 III 的动力学与经典的 Fermi-Ulam 模型^[16, 115] 有相似之处.

通常取碰撞面为截面来研究这类系统, 此截面的首次回归映射 (即 Poincaré 映射) 反映了系统的动力学. 下面定理为本章的主要结果.

定理 3.2.1. 假设 $V(x, t)$ 是 C^r ($r \geq 5$) 类函数, 那么有以下结论

- (i) 令 $[h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$ 为一非空闭区间. 则存在常数 $\epsilon_0 > 0$, 使得当 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, 且 $|V|_{C^5} \leq \epsilon$ 在 $[-\xi, \xi] \times S^1$ 上成立时, 系统 (3-1) 以

$$\{(x, y, t) : x = -\xi, y \in [\sqrt{2h_0 - 2\cos \xi} + O(\epsilon), \sqrt{2h_1 - 2\cos \xi} + O(\epsilon)]\}$$

为截面的 Poincaré 映射存在正测度的不变曲线; 并且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时不变曲线的测度趋于集合

$$S^1 \times [\sqrt{2h_0 - 2\cos \xi} + O(\epsilon), \sqrt{2h_1 - 2\cos \xi} + O(\epsilon)]$$

的全测度. 同样的结果对于以

$$\{(x, y, t) : x = \xi, y \in [\sqrt{2h_0 - 2\cos \xi} + O(\epsilon), \sqrt{2h_1 - 2\cos \xi} + O(\epsilon)]\}.$$

为截面的 Poincaré 映射也成立.

- (ii) 存在常数 $\epsilon_1 > 0$, 使得当 $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ 时, 系统 (3-1) 以

$$\{(x, y, t) : x = \xi, y \in [-\frac{4\xi}{\epsilon} + O(\epsilon), -\frac{2\xi}{\epsilon} + O(\epsilon)]\}$$

为截面的 Poincaré 映射存在不变曲线. 特别地, 系统 (3-1) 的所有解是有界的, 即

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |y(t)|) < \infty.$$

3.3 碰撞系统的等价系统及非光滑作用量-角变量变换

本节首先引入了单边弹性碰撞系统的一个等价系统: 这个等价系统不仅允许轨线穿过碰撞面, 而且也使得系统的 Hamilton 函数非光滑化. 这个等价系统首先由 Ivanov 与 Markeev^[46] 发现, 随后 Zharnitsky^[116] 将这个方法引入到平面凸台球系统中, 结合

非光滑作用量-角变量变换, Zharnitsky^[113] 大大化简了解析情况下 Lazutkin^[60] 关于平面凸台球边界附近不变曲线的存在性证明. 下面关于系统 (3-1) 的处理即启发于上述工作.

3.3.1 弹性碰撞系统的等价系统

考虑单自由度系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -w_x(x, t), \end{cases} \quad (3-2)$$

其中 $(x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个 C^2 类的函数. 假设在 $x = 0$ 处有一刚性墙壁, 且质点与墙壁的碰撞是完全弹性的, 即当 $x(t) = 0$ 时 $y(t^-) \rightarrow -y(t^+)$. 系统 (3-2) 的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -w_x(x, t), \end{cases} \quad x > 0, \quad (*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = w_x(-x, t). \end{cases} \quad x < 0 \quad (**) \quad (3-3)$$

下面解释这一点. 注意到, 如果方程 (*) 以 $x(t_0) = x_0 \geq 0$, $y(t_0) = y_0$ 为初值的解为

$$(x(t, t_0, x_0, y_0), y(t, t_0, x_0, y_0)),$$

其中当 $t \in [t_0, t_1]$ 时 $x(t, t_0, x_0, y_0) \geq 0$, 则

$$(-x(t, t_0, x_0, y_0), -y(t, t_0, x_0, y_0))$$

是方程 (**) 以 $x(t_0) = -x_0 \leq 0$, $y(t_0) = -y_0$ 为初值的解. 设系统 (3-2) 的一个解为

$$\{(x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)), (x^{(2)}(t), y^{(2)}(t)), \dots, (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)), \dots\},$$

其中对任意的 i , 当 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $(x^{(i)}(t), y^{(i)}(t))$ 都为方程 (3-2) 的解, 且

$$x^{(i)}(t_i) = x^{(i)}(t_{i+1}) = 0, \quad y^{(i)}(t_{i+1}) = -y^{(i+1)}(t_{i+1}), \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}), \quad x^{(i)}(t) > 0$$

根据上述分析以及碰撞是完全弹性的,

$$\{(x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)), (-x^{(2)}(t), -y^{(2)}(t)), (x^{(3)}(t), y^{(3)}(t)), (-x^{(4)}(t), -y^{(4)}(t)), \dots\},$$

为系统 (3-3) 的一个解. 图 3-3 给出了一个直观的解释.

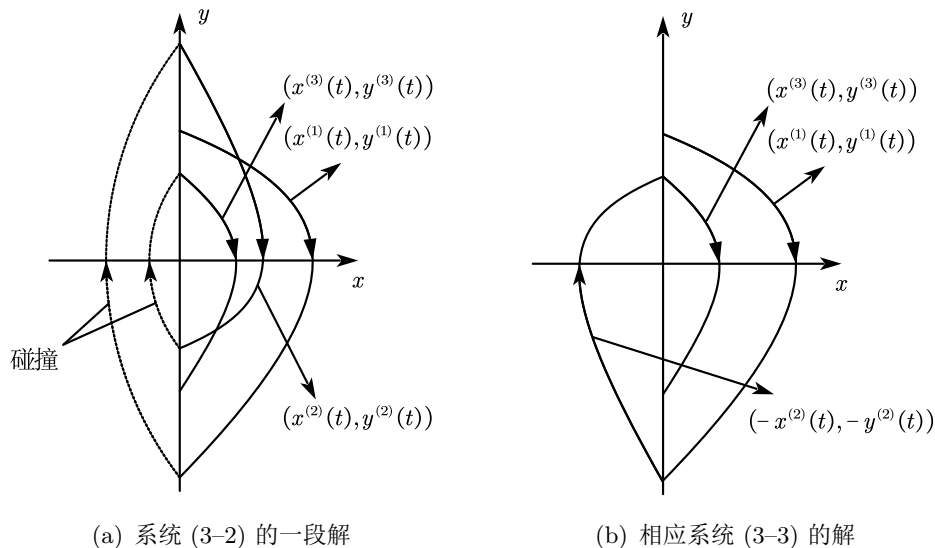


图 3-3 系统 (3-2) 与 (3-3) 解之间的关系.

等价系统 (3-3) 也为 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$K(y, x, t) = \frac{1}{2}y^2 + w(|x|, t).$$

注 3.3.1. 若系统 (3-2) 具有两个刚性墙壁, 例如 $x = 0$ 与 $x = 2\xi$, 则等价系统 (3-3) 从 $x = -2\xi$ 到 $x = 2\xi$ 的轨线对应于系统 (3-3) 从 $x = 2\xi$ 到 $x = 0$, 再从 $x = 0$ 到 $x = 2\xi$ 的轨线, 见图 3-4. 故如果此时用以 $\{(x, y, t) : x = 2\xi, y < 0\}$ 为截面的 *Poincaré* 映射来研究系统 (3-2), 则只需要确立等价系统 (3-3) 从 $\{(x, y, t) : x = -2\xi, y > 0\}$ 到 $\{(x, y, t) : x = 2\xi, y > 0\}$ 的映射即可. 本章在分析双面碰撞倒摆的双边碰撞运动时使用了这一等价关系.

3.3.2 非光滑作用量-角变量变换

此小节给出了区域 I 的一个非光滑的作用量-角变量变换, 可参考文献 [4]. 区域 II 的情形完全类似.

首先将 $x = -\xi$ 移至 $x = 0$, 根据上一小节的内容, 考虑等价系统的未扰 Hamilton

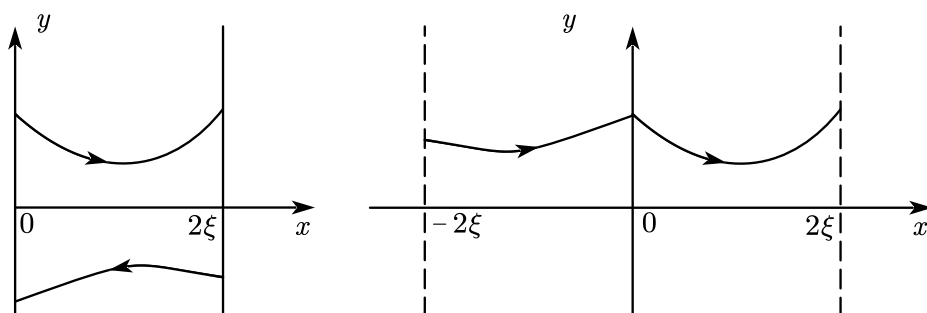
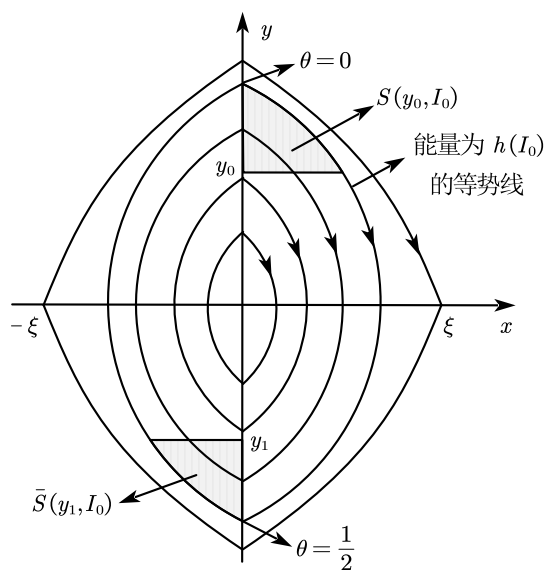


图 3-4 双边碰撞的等价轨道.

量:

$$H(y, x) = \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi). \quad (3-4)$$

在这一小节, 始终设 $h \in (\cos \xi, 1)$, $|x| < \xi$. 当 $h \in (\cos \xi, 1)$ 时等能集 $\{(x, y) : \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) = h, |x| < \xi\}$ 的结构如图 3-5 所示.

图 3-5 H 的等势线.

下面定义辛变换 $\Phi : (I, \theta) \mapsto (x, y)$. 令

$$I(h) = 4\sqrt{2} \int_0^{\arccos h + \xi} \sqrt{h - \cos(x - \xi)} dx. \quad (3-5)$$

注意到 $I(h)$ 即为由等能集 $\{(x, y) : \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) = h, |x| < \xi\}$ 所围区域的面积. 当 $h \in (\cos \xi, 1)$ 时, $I(h)$ 为 C^∞ 类的函数且 $I'(h) > 0$ (见引理 3.5.1). 记 $I(h)$ 的反函数为 $h(I)$.

令

$$D = \{(x, y) : \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) = h, |x| < \xi, \cos \xi < h < 1\}. \quad (3-6)$$

辛变换 $\Phi : (I, \theta) \mapsto (x, y)$ 各个变量的范围为 $I \in (0, I(1)), \theta \in S^1, (x, y) \in D$.

在 $x \geq 0$ 的区域, 定义生成函数:

$$S(y, I) = \int_y^{\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}} x(I, s) ds,$$

其中 $y \in [-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, \sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}]$, $x(I, y)$ 满足 $h(I) = \frac{1}{2}y^2 + \cos(x(I, y) - \xi)$, 即

$$x(I, y) = -\arccos(h(I) - \frac{1}{2}y^2) + \xi.$$

给定 I_0, y_0 , 图 3-5 右上方阴影区域的面积即为 $S(I_0, y_0)$. 映射 Φ 在此区域定义为

$$x = -S_y(y, I), \quad \theta = S_I(y, I). \quad (3-7)$$

因此有

$$dS(y, I) = -x dy + \theta dI \Rightarrow 0 = d(dS(y, I)) = -dx \wedge dy + d\theta \wedge dI \Rightarrow dy \wedge dx = dI \wedge d\theta.$$

故 Φ 为辛变换.

由于当 $y \in [-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, \sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}]$ 时

$$\frac{\partial^2 S}{\partial I \partial y} = -\frac{h'(I)}{\sqrt{1 - (h(I) - \frac{1}{2}y^2)}} < 0, \quad (3-8)$$

故可从 (3-7) 的第二个式子确定 $y(I, \theta)$, 则 $x(I, \theta)$ 可由 (3-7) 的第一式确定. 这样映射 Φ 便定义好了. 注意到, 当 $x \geq 0, \theta \in [0, 1/2]$. 实际上, 对于 $(x, y) \in D$ 且 $x \geq 0$, 可由 $\frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) = h(I)$ 确定出 I , 并且 y 的取值范围为

$$[-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, \sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}].$$

那么有

$$\theta = \frac{\partial}{\partial I} S(\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, I) = 0, \quad \theta = \frac{\partial}{\partial I} S(-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, I) = \frac{\partial}{\partial I} (\frac{1}{2}I) = \frac{1}{2}.$$

由 (3-8), $\partial\theta/\partial y < 0$. 因此 $\theta \in [0, 1/2]$. 当 $x \geq 0$ 时, 由于函数 $S(y, I)$ 是 C^∞ 类的函数, 故函数 $x(I, \theta)$ 与 $y(I, \theta)$ 也为 C^∞ 类的函数.

在 $x \leq 0$ 的区域, 类似地定义

$$\bar{S}(y, I) = \int_y^{-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}} \tilde{x}(s, I) ds,$$

其中 $y \in [-\sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}, \sqrt{2(h(I) - \cos \xi)}]$, $\tilde{x}(I, y)$ 满足 $h(I) = \frac{1}{2}y^2 + \cos(\tilde{x}(I, y) + \xi)$, 即

$$\tilde{x}(I, y) = \arccos(h(I) - \frac{1}{2}y^2) - \xi.$$

给定 I_0, y_1 , 图 3-5 左下方阴影区域的面积即为 $\bar{S}(I_0, y_1)$. 映射 Φ 在此区域由以下式子所定义:

$$x = -\bar{S}_y(y, I), \quad \theta = \frac{1}{2} + \bar{S}_I(y, I). \quad (3-9)$$

由于

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial I \partial y} = \frac{h'(I)}{\sqrt{1 - (h(I) - \frac{1}{2}y^2)}} > 0, \quad (3-10)$$

可从 (3-9) 的第二式确定出 $y(I, \theta)$. 这样 $x(I, \theta)$ 可由 (3-9) 的第一式确定. 类似地, 可说明在 $x \leq 0$ 的区域里有 $\theta \in [1/2, 1]$. 同样地, 在此区域, $x(I, \theta)$ 与 $y(I, \theta)$ 为 C^∞ 类的函数.

注意到 $\theta \in S^1$, 这是由于当 (x, y) 沿着等势线绕一周回到自身后, 生成函数增加了 I , 即 θ 增加了 1. 变换 Φ 在 $\theta \in \{0, \frac{1}{2}\}$ 处是非光滑的. 例如, 由 (3-7) 与 (3-9), 有

$$\text{对于 } x \geq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{S_{Iy}}; \quad \text{对于 } x \leq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{\bar{S}_{Iy}}. \quad (3-11)$$

当 $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow \sqrt{2(h - \cos \xi)}$ 时, $\theta \rightarrow 0^+$; 当 $x \rightarrow 0^-, y \rightarrow \sqrt{2(h - \cos \xi)}$ 时, $\theta \rightarrow 1^-$, 即 $\theta \rightarrow 0^-$. 由 (3-8) 与 (3-10), 可得到

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\partial y}{\partial \theta}(I, \theta) = -\frac{\sqrt{1 - \cos \xi}}{h'(I)} \neq \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\partial y}{\partial \theta}(I, \theta) = \frac{\sqrt{1 - \cos \xi}}{h'(I)}.$$

因此, 变换 Φ 在 $\theta = 0$ 处是非光滑的. 同理可说明 $\theta = \frac{1}{2}$ 时的情况.

为了方便, 将上述讨论总结如下:

命题 3.3.1. 对于 $I \in (0, I(1))$, $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ 或 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, 变换 $\Phi: (I, \theta) \mapsto (x, y)$ 是 C^∞ 类的映射. 特殊地, 当 $(I, \theta) \in [I(h_0), I(h_1)], \theta \in [0, \frac{1}{2}]$, 函数 $x(I, \theta)$ 是 C^r ($r \geq 1$) 的

且其范数有界, 其中 $[h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$.

3.4 区域 I 与 III 上的扭转映射

本节将在形式上把区域 I 与 III 处的动力学化为近可积的扭转映射. 由于区域 II 的处理与区域 I 完全类似, 这里不再赘述. 本节中一些必要的估计放在了本章第 5 节.

3.4.1 区域 I 上的约化

本小节考虑当 $|V|_{C^5}$ 较小时区域 I 中的单边碰撞运动. 一般地, 研究这类运动时通常考虑以碰撞面为截面的 Poincaré 映射. 若取

$$\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$$

为截面, 忽略常值坐标 $x = -\xi$ 后, Poincaré 映射可分解为以下两个映射的复合:

$$(y_0, t_0) \xrightarrow{(i)} (-y_1, t_1) \xrightarrow{(ii)} (y_1, t_1), \quad (3-12)$$

其中 $y_0, y_1 > 0$, 映射 (i) 为系统 (3-1) 流的作用, (3-1) 的流将状态 $(-\xi, y_0, t_0)$ 带到 $(-\xi, -y_1, t_1)$, 映射 (ii) 为碰撞映射. 建立扭转映射的关键在于 $t_1 - t_0$ 的估计. 在上节的作用量-角变量坐标下, 可知 (y_0, t_0) 到达 $(-y_1, t_1)$ 时角坐标 θ 从 0 增加到 $1/2$. 因此如果可以选择 θ 为时间, 映射 (i) 所消耗的时间将是固定的. 此时取能量与时间作为变量, 则 Poincaré 映射在新变量下为

$$(H_0, t_0) \xrightarrow{(i)} (H_1, t_1) \xrightarrow{(ii)} (H_1, t_1),$$

其中 $H_i = H(y_i, -\xi, t_i)$, 由于碰撞不改变能量, 映射 (ii) 变为恒同映射. 故如果可作变换使得系统 (3-1) 在区域 I 为一个近可积的以 θ 为时间的 Hamilton 系统, 则以碰撞面为截面的 Poincaré 映射即为此近可积系统的时间- $\frac{1}{2}$ -映射. 因此可以形式上积分此近可积系统来得到扭转映射.

系统 (3-1) 的 Hamilton 量为

$$H(y, x, t) = \frac{1}{2}y^2 + \cos x + V(x, t).$$

将墙壁 $x = -\xi$ 平移至 $x = 0$, 由本章 3.3.1 节, 考虑如下系统

$$H(y, x, t) = \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) + V(|x| - \xi, t), \quad (3-13)$$

根据 3.3.2 中的作用量-角变量变换, Hamilton 系统 (3-13) 在区域 D 可用坐标 (I, θ) 表示为

$$H(I, \theta, t) = h(I) + V(|x(I, \theta)| - \xi, t). \quad (3-14)$$

注意到, 由本节开始时的分析, 只需考虑 $\theta \in [0, 1/2]$ 时的情况, 即 $x \geq 0$. 因此可将 (3-14) 中的绝对值去掉. 下面将交换系统 (3-14) 的广义坐标与时间, 同时也将交换 Hamilton 量与广义动量, 参见本文第二章推论 2.2.3. 类似的做法见文献 [64, 115, 116]. 具体地, 由于 Hamilton 系统的积分曲线与以下微分形式

$$Id\theta - Hdt = -(Hdt - Id\theta)$$

联系的不变性, 可取 (I, H, t, θ) 分别作为新的 Hamilton 量, 广义动量, 广义坐标以及时间. 注意到 (3-14) 中的 V 及其各阶导数都很小且 $h'(I) > 0$, 因此利用隐函数定理可形式地得到

$$I(H, t, \theta) = I(H) + I_1(H, t, \theta),$$

其中 $I(\cdot)$ 为 $h(\cdot)$ 的反函数, 见 3.3.2 小节. 相应地, 以 I 为 Hamilton 量的 Hamilton 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\theta} &= I'(H) + \frac{\partial I_1}{\partial H}(H, t, \theta), \\ \frac{dH}{d\theta} &= -\frac{\partial I_1}{\partial t}(H, t, \theta). \end{aligned} \quad (3-15)$$

形式上在 $\theta \in [0, 1/2]$ 积分, 可得到扭转映射

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{1}{2}I'(H_0) + N_1(t_0, H_0), \\ H_1 &= H_0 + N_2(t_0, H_0), \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中 N_1, N_2 为依赖于积分初值 (t_0, H_0) 的函数.

首先注意到映射 (3-16) 满足图交性质. 这是由于映射 (3-16) 是通过取一个 Hamilton 系统的时间截面所得, 详细证明可参见 [115, Section 8] 或 [27, Lemma 4]. 因此, 映射 (3-16) 满足 Moser 扭转定理 (参见本文定理 2.1.1) 的条件, 如果可证明以下结论成立:

(a) 存在常数 $\epsilon_0, a, C > 0$, 使得当 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 且 $|V|_{C^5} \leq \epsilon$ 在 $(x, t) \in [-\xi, \xi] \times S^1$ 成立时, 有

$$|I''(H)| \geq a > 0, |N_i|_{C^4} \leq C\epsilon, (i = 1, 2), \quad (3-17)$$

在 $(H, t) \in [h_0, h_1] \times S^1$ 上成立, 其中 $[h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$ 为一个非空区间.

为了在 (a) 成立的条件下说明定理 3.2.1 (i) 成立, 还需要将映射 (3-16) 返回到以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$ 为截面的 Poincaré 映射 (这里将 $x = 0$ 平移回 $x = -\xi$). 由 H 的表达式, 映射 (3-16) 为

$$(t, \frac{1}{2}y^2 + \cos \xi + O(\epsilon)) \rightarrow (t + \frac{1}{2}I'(h(y, -\xi) + O(\epsilon)) + O(\epsilon), \frac{1}{2}y^2 + \cos \xi + O(\epsilon)),$$

其中 $y^2/2 + \cos \xi + O(\epsilon) \in [h_0, h_1]$, $h(y, x) = y^2/2 + \cos(x)$. 上式的映射具有形式

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{1}{2}I'(h(y_0, -\xi)) + O(\epsilon), \\ y_1 &= y_0 + O(\epsilon), \end{aligned}$$

其中 $(t_0, y_0) \in S^1 \times [\sqrt{2h_0 - 2\cos \xi} + O(\epsilon), \sqrt{2h_1 - 2\cos \xi} + O(\epsilon)]$. 由 Moser 扭转定理即得到定理 3.2.1 (i). (a) 的证明见命题 3.5.1 (i).

3.4.2 区域 III 上的约化

本小节考虑系统 (3-1) 的双边碰撞情形. 由注 3.3.1, 将墙壁 $x = -\xi$ 平移到原点以后, 可等价地考虑系统

$$H(y, x, t) = \frac{1}{2}y^2 + \cos(|x| - \xi) + V(|x| - \xi, t)$$

从 $\{(x, y, t) : x = -2\xi, y > 0\}$ 到 $\{(x, y, t) : x = 2\xi, y > 0\}$ 的运动. 同上一节类似, 这里仍取合适的变换使得 x 为一个近可积 Hamilton 系统的时间, 这样仍可形式上积分此近可积系统来得到扭转映射.

首先利用尺度化变换 (见本文命题 2.2.2) 将在高速区域的势能 $V, \cos(|x| - \xi)$ 化为小量. 引入小参数 $\epsilon > 0$. 由 Hamilton 系统的积分曲线与如下微分形式联系的不变性:

$$\epsilon(ydx - Hdt) = \epsilon ydx - \epsilon^2 H d\frac{t}{\epsilon},$$

取 $(\epsilon y, x, \epsilon^2 H, \frac{t}{\epsilon}) = (p, q, F, T)$ 分别为新的广义动量, 广义坐标, Hamilton 量和时间.

注意到, 当 $p \in [1, 2]$ 意味着 $y \in [\frac{1}{\epsilon}, \frac{2}{\epsilon}]$. 由 F 的定义可得到

$$F(p, q, T) = \frac{1}{2}p^2 + \epsilon^2(\cos(|q| - \xi) + V(|q| - \xi, \epsilon T)). \quad (3-18)$$

下面交换时间与位置, 使得 q 作为一个新的时间. 由于

$$\epsilon(pdq - FdT) = -(Fd\epsilon T - \epsilon pdq),$$

可取 $(F, \epsilon T, \epsilon p, q) = (P, Q, M, s)$ 分别为新的广义动量, 广义坐标, Hamilton 量和时间. 根据 (3-18), 可反解出

$$p = \sqrt{2F} + \epsilon^2 G(F, |q|, \epsilon T).$$

因此有

$$M(P, Q, s) = \epsilon p = \epsilon\sqrt{2P} + \epsilon^3 G(P, Q, |s|).$$

相应于 M 的 Hamilton 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{2P}} + \epsilon^3 \frac{\partial G}{\partial P}, \\ \frac{dP}{ds} &= -\epsilon^3 \frac{\partial G}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (3-19)$$

为了使积分后的映射与 Moser 小扭转定理中的映射 (参见本文注 2.1.2) 一致, 还需要作一次变换. 令 $\frac{4\xi}{\sqrt{2P}} = \bar{P}$. 方程 (3-19) 在坐标 $(\bar{P}, Q)$ 为

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= \frac{\epsilon\bar{P}}{4\xi} + \epsilon^3 G_1(\bar{P}, Q, |s|), \\ \frac{d\bar{P}}{ds} &= \epsilon^3 G_2(\bar{P}, Q, |s|), \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中

$$G_1(\bar{P}, Q, |s|) = \frac{\partial G}{\partial P}(\frac{8\xi^2}{\bar{P}^2}, Q, |s|), G_2(\bar{P}, Q, |s|) = \frac{\bar{P}^3}{16\xi^2} \frac{\partial G}{\partial Q}(\frac{8\xi^2}{\bar{P}^2}, Q, |s|).$$

在 $s \in [-2\xi, 2\xi]$ 积分方程 (3-20), 得到扭转映射

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 + \epsilon\bar{P} + \epsilon^3 R_1(\epsilon; Q_0, \bar{P}_0), \\ \bar{P}_1 &= \bar{P}_0 + \epsilon^3 R_2(\epsilon; Q_0, \bar{P}_0), \end{aligned} \quad (3-21)$$

其中 R_i 为依赖于 ϵ 的函数.

注意到, Hamilton 方程 (3-19) 的时间截面映射满足图交性质. 由于映射 (3-21) 与其共轭, 故映射 (3-21) 也满足图交性质. 映射 (3-21) 满足 Moser 小扭转定理^[94] 的条件, 如果以下结论成立:

(b) 存在常数 $\epsilon_1 > 0$, 使得当 $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ 时

$$\epsilon^3 |R_i|_{C^4} \leq \epsilon^{1+\nu} \quad (3-22)$$

在 $(Q, \bar{P}) \in [1, 2] \times S^1$ 上成立 ($i = 1, 2$), 其中 $\nu > 0$ 为不依赖于 ϵ 的常数.

将本节所用到的变换回溯 (墙壁 $x = 0$ 也平移回 $x = -\xi$), 截面 $\{(x, y, t) : x = \xi, y > 0\}$ 的 Poincaré 映射具有形式

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 - \frac{4\xi}{y_0} + O(\epsilon^2), \\ y_1 &= y_0 + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

其中 $(y_0, t_0) \in [-\frac{4\xi}{\epsilon} + O(\epsilon), -\frac{2\xi}{\epsilon} + O(\epsilon)] \times S^1$. 如果取能量为变量, 对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$, 区域

$$\{(H, t) : H \in [\frac{4\xi^2}{\epsilon^2} + C, \frac{16\xi^2}{\epsilon^2} + C]\}$$

存在大量的不变曲线. 因此对于任意的解, 系统的能量总是有界的.

注 3.4.1. 注意到映射 (3-16) 与由积分方程 (3-19) 所得到的映射都满足单调扭转条件, 因此可在两条不变曲线之间, 利用文献 [88, Section 5] 中的方法, 作一个合适的变换使得映射在此不变曲线之间为保边界的单调扭转映射. 因此可利用 Aubry-Mather 理论^[8, 73] 得到任意在扭转区间内的无理数所对应的广义拟周期解, 也可得到任意在扭转区间内的有理数所对应的次谐周期轨道.

总结本节内容: 当估计 (3-17) 与 (3-22) 成立时, 利用 Moser 扭转定理以及 Moser 小扭转定理可证明定理 3.2.1.

3.5 主要项的估计

本节证明估计 (3-17), (3-22) 以及函数 $I(h)$ 的性质. 为了方便, 将估计 (3-17), (3-22) 重述于此.

命题 3.5.1. (i) 存在正常数 ϵ_0, a 使得 $|I''(H)| \geq a > 0$ 对 $H \in [h_0, h_1]$ 成立; 且对任意的 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, 若

$$|V|_{C^5} \leq \epsilon \quad (3-23)$$

在 $(x, t) \in [-\xi, \xi] \times S^1$ 上成立, 则有

$$|N_i|_{C^4} \leq C\epsilon$$

在 $(H, t) \in [h_0, h_1] \times S^1$ 上成立 ($i = 1, 2$), 其中 C 为常量, 区间 $[h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$.

(ii) 存在常数 $\epsilon_1 > 0$, 使得对任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ 以下估计

$$\epsilon^3 |R_i|_{C^4} \leq \epsilon^{1+\nu}$$

在 $(Q, \bar{P}) \in [1, 2] \times S^1$ 上成立 ($i = 1, 2$), 其中 $\nu > 0$ 为常数.

引理 3.5.1. 函数 $I(h)$ 在区间 $[h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$ 是 C^∞ 类的函数, 且有 $I'(h) > 0, I''(h) > 0$ 在 $h \in [h_0, h_1]$ 上成立.

证明: 由 I 的定义 (3-5),

$$I'(h) = 2\sqrt{2} \int_0^{\arccos h - \xi} \frac{dx}{\sqrt{h - \cos(x - \xi)}} = T(h),$$

其中 $T(h)$ 是未扰系统 (3-4) 以 $h \in (\cos \xi, 1)$ 为能量的闭轨的周期. 为了分析 $T(h)$, 以及 $T'(h)$ 的性态, 先对无碰撞情形进行分析.

考虑数学摆的 Hamilton 量

$$H(y, x) = \frac{1}{2} - \cos x,$$

这里 $(0, 0)$ 为中心, $(\pi, 0)$ 为鞍点. 考虑摆未转一圈时的运动, 即能量 $h \in (0, 1)$. 令摆的最大转角为 θ_0 , 即有 $-h = \cos \theta_0$. 令

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi. \quad (3-24)$$

若 $x \in [0, \theta_0]$, 则 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 故有

$$\frac{dy}{dt} = -\sin x = -2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = -2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}.$$

由于

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(h + \cos x)} \\ &= \sqrt{2(-\cos \theta_0 + \cos x)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{-(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}) + (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi)} \\ &= 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi, \end{aligned}$$

可从上式得到

$$dy = -2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi d\varphi.$$

因此有

$$-\frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi d\varphi}{dt} = -2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}.$$

以能量 $h \in (0, 1)$ 的闭轨的周期为

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}}, \quad (3-25)$$

其中 $\theta_0 = \arccos -h$.

首先作平移将数学摆的原点 $x = 0$ 平移至 $x = \pi - \xi$. 由 (3-24) 和 (3-25), 可得到

$$\begin{aligned} I'(h) = T(h) &= 2\sqrt{2} \int_0^{\arccos h - \xi} \frac{dx}{\sqrt{h - \cos(x - \xi)}} \\ &= 4 \int_{K(h)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\arccos -h}{2}) \sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \quad (3-26)$$

其中 $K(h)$ 满足

$$\sin \frac{\pi - \xi}{2} = \sin \frac{\arccos -h}{2} \sin K(h),$$

即

$$K(h) = \arcsin \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\sin \frac{\arccos -h}{2}}.$$

由 (3-26), $I'(h) > 0$. 当 $h \in [h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$, 式 (3-26) 中的分母不为零. 故 $I'(h)$ 是 C^∞ 类的函数. 通过直接计算可得到

$$I''(h) = T'(h) = 4 \int_{K(h)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - \sin^2 \frac{\arccos - h}{2} \sin^2 \varphi)^{3/2}} - 4 \frac{K'(h)}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\xi}{2}}}, \quad (3-27)$$

其中

$$K'(h) = - \frac{\cos \frac{\xi}{2} \cos \frac{\arccos - h}{2}}{2\sqrt{1 - h^2} \sqrt{\sin^4 \frac{\arccos - h}{2} - \sin^2 \frac{\arccos - h}{2} \cos^2 \frac{\xi}{2}}}.$$

故当 $h \in (\cos \xi, 1)$, $I''(h) > 0$. 且当 $h \rightarrow 1$ 或 $h \rightarrow \cos \xi$ 时, $I''(h) \rightarrow \infty$. $\square$

一个在闭集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 f 称作是 C^r 类的, 若存在一个开集 U , 使得 $K \subset U$, 且存在 U 上的 C^r 类的函数 g , 使得 $g|_K = f$. 下面的引理可由隐函数定理得到.

引理 3.5.2. ^[54] 设 $[x_0, x_1] \subset U$, $K \subset V$, 其中 $x_0 < x_1$, U 为一个开区间, K 为包含于开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的一个有界闭集. 假设 $y = f(x) + f_1(x, w)$ 在 $U \times V$ 上成立, 其中 $x \in U, w \in V$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}, f_1: U \times V$ 都为 C^r ($r > 1$) 类的函数. 若 $f'(x) > 0$ 在 U 上成立, 且

$$|f_1|_{C^r} \leq \epsilon$$

在 $U \times V$ 上成立, 其中 $\epsilon > 0$. 则存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得当 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 时, 存在 x 的反函数

$$x = f^{-1}(y) + g_1(y, w),$$

其中, $y \in f([x_0, x_1]), w \in K$, g_1 是 $f([x_0, x_1]) \times K$ 上的 C^r 类函数且其满足

$$|g_1|_{C^r} \leq C\epsilon,$$

其中 C 为常数.

命题 3.5.1 的证明: 由引理 3.5.1, 当 $H \in [h_0, h_1] \subset (\cos \xi, 1)$ 时有 $I''(H) \geq a > 0$. 令 $I_0 = h^{-1}(h_0) = I(h_0)$, $h_1 = h^{-1}(h_1) = I(h_1)$. 首先取一个小常数 $\delta > 0$ 使得 $[h(I_0 - \delta), h(I_1 + \delta)] \subset (\cos \xi, 1)$. 由于函数 $x(I, \theta)$ 在 $[I_0 - \delta, I_1 + \delta] \times [0, \frac{1}{2}]$ 上是 C^r 有界的 (对任意的 $r \geq 0$), 根据式 (3-23) 我们有

$$|V(x(I, \theta) - \xi, t)|_{C^5} \leq C\epsilon$$

在 $(I, \theta, t) \in [I_0 - \delta, I_1 + \delta] \times [0, \frac{1}{2}] \times S^1$ 上成立. 由引理 3.5.2, 我们有

$$|I_1(H, t, \theta)|_{C^5} \leq C_1 \epsilon$$

在 $(H, t, \theta) \in [h(I_0 - \delta) + O(\epsilon), h(I_1 + \delta) + O(\epsilon)] \times S^1 \times [0, \frac{1}{2}]$ 上成立. 由于 $h(I)$ 是一个严格单调增函数, 可取 $\epsilon_0 > 0$ 充分小使得

$$[h(I_0), h(I_1)] \subset [h(I_0 - \delta) + O(\epsilon), h(I_1 + \delta) + O(\epsilon)] \subset (\cos \xi, 1)$$

对 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 成立. 特别地, 我们有

$$|E_i(H, t, \theta)|_{C^4} \leq C_1 \epsilon \quad (3-28)$$

在 $(H, t, \theta) \in [h(I_0), h(I_1)] \times S^1 \times [0, \frac{1}{2}]$ 上成立, 其中 $i = 1, 2$, $E_1 = \frac{\partial I_1}{\partial H}, E_2 = -\frac{\partial I_1}{\partial t}$. 由于我们形式地在区间 $\theta \in [0, 1/2]$ 上积分了方程 (3-15), N_i 与扰动项 E_i 的估计相同 ([70, Lemma 1]). 这样就完成了 (i) 的证明.

类似地, 取常数 $\delta > 0$, 考虑区间 $[2\xi - \delta, 4\xi + \delta]$. 注意到 $p \in [2\xi - \delta, 4\xi + \delta]$ 意味着 $|y| \in [\frac{2\xi - \delta}{\epsilon}, \frac{4\xi + \delta}{\epsilon}]$. 由 (3-18) 以及引理 3.5.2, 我们有

$$\epsilon^2 |G(F, |q|, \epsilon T)|_{C^5} \leq c_1 \epsilon^2$$

在

$$(F, |q|, \epsilon T) \in [(2\xi - \delta)^2/2 + O(\epsilon^2), (4\xi + \delta)^2/2 + O(\epsilon^2)] \times [0, 2\xi] \times S^1$$

上成立. 故我们有

$$\epsilon^3 |F_i(P, Q, |s|)|_{C^4} \leq c_1 \epsilon^3$$

在 $(P, Q, |s|) \in [(2\xi)^2/2, (4\xi)^2/2] \times S^1 \times [0, 2\xi]$ 上成立, 其中 $i = 1, 2$, $F_1 = \frac{\partial G}{\partial Q}, E_2 = -\frac{\partial G}{\partial P}$. 由 $\bar{P}, G_i$ 的定义,

$$\epsilon^3 |G_i(\bar{P}, Q, |s|)|_{C^4} \leq c_2 \epsilon^3 \quad (3-29)$$

在 $(\bar{P}, Q, |s|) \in [1, 2] \times S^1 \times [0, 2\xi]$ 上成立. 同样地, R_i 具有与 $\epsilon^3 G$ 类似的估计. 令 c_3 为常数使得

$$\epsilon^3 \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \bar{P}^k \partial Q^l} R_i(\bar{P}_0, Q_0, \epsilon) \right| \leq c_3 \epsilon^3.$$

取 ϵ_1 充分小使得 $c_3 \epsilon^3 \leq \epsilon^{1+\nu}$ 对于某个常量 $\nu > 0$ 成立, 其中 $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$. 证毕. $\square$

3.6 碰撞系统不变流形计算的数值方法

本节给出了计算单自由度碰撞系统不变流形的数值方法, 在下一小节将此方法应用到了系统 (3-1). 此数值算法受到了文献 [45] 的启发.

不失一般性, 这里以系统 (3-1) 为例. 设函数 V 关于 t 是 T 周期的. 当 V 较小时, 在 $(0,0)$ 点附近存在唯一的一个鞍点型的 T -周期轨道. 令从 $t = 0$ 到 $t = T$ 的时间- T -映射为 ϕ , 鞍点型的周期轨道即为映射 ϕ 的鞍点. 首先需要精确定位此鞍点. 通常地, 利用打靶法可以得到 ϕ 的不动点 $X^* = (x^*, y^*)$, 以及矩阵 $D\phi(X^*)$. 假设 $D\phi(X^*)$ 的特征矢量与相应的特征值为 $v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2$. 不妨设 $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$.

下面叙述计算鞍点 X^* 的不稳定流形的步骤, 稳定流形的情形是类似的.

- (1) 取以 X^* 为起点方向与 v_1 相同的短线段 l_0 . 通常此线段的长度选得很小. 在 l_0 上均匀地取点:

$$A_0 = \{X_1, X_2, \dots, X_N\},$$

其中 $X_1 = X^*$, X_N 为 l_0 的另一个端点. 用映射 ϕ 作用到点列 A_0 上:

$$\phi(A_0) = \{\phi(X_1), \phi(X_2), \dots, \phi(X_N)\}.$$

这里需要取线段 l_0 充分小使得 A_0 中的点在一个周期 T 内的轨线不与碰撞面相交. 注意到 $\phi(X_1) = X_1$, 取 $\phi(A_0)$ 中满足

$$\|\phi(X_i) - X_1\| \geq \|X_N - X_1\| \quad (3-30)$$

的点. 令集合 $\bar{A}_0$ 为

$$\bar{A}_0 = \{X_N, \phi(X_n), \phi(X_{n+1}), \dots, \phi(X_N)\},$$

其中当 $n \leq i \leq N$ 时 X_i 满足 (3-30). 下面即可以对点列 $\bar{A}_0$ 进行延拓.

- (2) 点列 $\bar{A}_0$ 的延拓是基于下面所描述的参数化方法. 首先对点列 $\bar{A}_0$ 作数值内插, 数值内插得到的曲线为 $p_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, 其满足:

$$p_0\left(\frac{i-1}{\#(\bar{A}_0)-1}\right) = \text{index}[\bar{A}_0](i), \quad (3-31)$$

其中 $\#$ 为一个集合的基数, $\text{index}[\cdot]$ 为一个映射使得 $\text{index}[C](i)$ 是有限集合 C

的第 i 个元素. 由上述构造, $p_0(0) = X_N$, $p_0(1) = \phi(X_N)$. 若 $p_0(s) = \phi(X_i)$, 称 s 为点 $\phi(X_i)$ 的参数坐标. 将 $\tilde{A}_0$ 中的点与其参数坐标联系起来得到新的集合:

$$\tilde{A}_0 = \{(X_N, 0), \dots, (\phi(X_N), 1)\}.$$

通过以下式子定义映射 $\bar{\phi}$

$$\bar{\phi}((X, s)) = (\phi(X), s, n),$$

其中 n 为轨线 $\phi^t(X)$ 在时间 $t \in [0, T]$ 内的碰撞次数 ($\phi^t(X)$ 为 $t = 0$ 时刻以 X 为初值的解). 用映射 $\bar{\phi}$ 作用 $\tilde{A}_0$, 并将集合 $\bar{\phi}(\tilde{A}_0)$ 依照最后一个坐标的变化进行拆分. 设拆分以后的集合为:

$$\{A_1^1, A_2^1, \dots, A_k^1\}.$$

- (3) 最后一个坐标的变化意味着不稳定流形与碰撞面的碰撞. 现在叙述如何定位不稳定流形与碰撞面的交点. 令集合 A_1^1 的最后一个元素与集合 A_2^1 的第一个元素分别为 $(X_j, s_j, n_j), (X_{j+1}, s_{j+1}, n_{j+1})$. 若下列不等式成立:

$$\|(x_j, |y_j|) - (x_{j+1}, |y_{j+1}|)\| \leq \delta_1, \quad (3-32)$$

其中 $X_j = (x_j, y_j)$, $X_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$, $0 < \delta_1 \ll 1$ 为一个固定的常数, 则不对这两个集合作变动. 若不等式 (3-32) 不成立, 将元素

$$\bar{\phi}\left(p_0\left(\frac{1}{2}(s_j + s_{j+1})\right), \frac{1}{2}(s_j + s_{j+1})\right)$$

添加到集合 A_1^1 的最后一个位置或者添加到集合 A_2^1 的第一个位置, 这取决于此元素的最后一个坐标是 n_j 或者是 n_{j+1} . 重复此步骤直到集合 A_1^1 or A_2^1 不再变化. 对于每一对相邻集合 A_j^1, A_{j+1}^1 都如此处理, 定位步骤完成.

- (4) 为了保证插值得到的曲线的精确性, 还需要确保集合 A_i^1 中每两个相邻元素的距离不能太远. 具体地可如此处理: 设 $(X_i, s_i, n_i), (X_{i+1}, s_{i+1}, n_{i+1})$ 为集合 A_j^1 中的一对相邻元素, 若下列不等式成立

$$\|X_i - X_{i+1}\| \leq \delta_2, \quad (3-33)$$

在不作任何处理. 若不等式 (3-33) 不成立, 则在这两点之间插入 m 个点:

$$\bar{\phi}((p_0(s_i + d_1), s_i + d_1)), \dots, \bar{\phi}((p_0(s_i + d_m), s_i + d_m))$$

其中对 $1 \leq l \leq m$,

$$d_l = \frac{l(s_{i+1} - s_i)}{m+1}.$$

将上述步骤应用到集合 A_j^1 的每一对相邻元素中, 得到了一个新的集合, 仍记为 A_j^1 . 反复将此步骤作用于 A_j^1 直至其不再变化, 即不等式 (3-33) 对 A_j^1 中的任一对相邻元素都成立. 对集合 A_l^1 ($1 \leq l \leq k$) 都做如此处理后, 即得到了下次迭代的数据点.

- (5) 对 $1 \leq l \leq k$, 将集合 A_l^1 中每个元素的最后两个坐标移除. 利用式子 (3-31), 将利用插值点列 A_l^1 得到的曲线记为 p_l^1 . 现在已经得到下一次迭代所需要的数据以及参数曲线:

$$\{A_1^1, A_2^1, \dots, A_k^1\}, \{p_1^1, p_2^1, \dots, p_k^1\}.$$

至此, 第一次迭代完成.

将步骤 (2)-(5) 应用到每一对 A_i^1, p_i^1 可得到第二次迭代的数据以及参数曲线:

$$\begin{aligned} &\{A_{1,1}^2, A_{1,2}^2, \dots, A_{1,l_1}^2, A_{2,1}^2, A_{2,2}^2, \dots, A_{2,l_2}^2, \dots, A_{k,1}^2, A_{k,2}^2, \dots, A_{k,l_k}^2\}, \\ &\{p_{1,1}^2, p_{1,2}^2, \dots, p_{1,l_1}^2, p_{2,1}^2, p_{2,2}^2, \dots, p_{2,l_2}^2, \dots, p_{k,1}^2, p_{k,2}^2, \dots, p_{k,l_k}^2\}, \end{aligned}$$

其中 $A_{i,j}^2, p_{i,j}^2$ 由 A_i^1, p_i^1 所生成 ($1 \leq j \leq l_i$). 重复此步骤, 即可以得到第三次, 第四次, ..., 迭代的数据以及参数曲线.

将每一次的参数化曲线收集起来, 这样就得到了不稳定流形的一支. 对一个与 $-v_1$ 同向且起点在鞍点的小线段作同样的处理即可以得到另外一支. 这样, 不稳定流形的计算就完成了. 对于稳定流形, 由于微分方程可以负向时间积分, 只需要将 ϕ, v_1 替换成 ϕ^{-1}, v_2 , 实施相同的步骤即可.

注 3.6.1. 这里初始线段取的是与特征方向相同的一个小直线段, 如果想得到更精确的初始线段, 如取一个二次曲线, 则需要计算方程 (3-1) 的在鞍点型周期解的二阶变分方程.

注 3.6.2. 步骤 (3), (4) 添加的点可能使得 A_i^1 中元素的最后一个坐标不相同, 这时需要对集合 A_i^1 再次进行拆分并应用步骤 (3).

注 3.6.3. 对于非保守的碰撞, 即当 $|x| = \xi$ 时, $y \rightarrow -ry$, 其中 $0 < r < 1$ 为一个常数, 计算不稳定流形时需要将判据 (3-32) 换成

$$\|(x_j, r|y_j|) - (x_{j+1}, |y_{j+1}|)\| \leq \delta_1.$$

类似地, 计算稳定流形相应的判据为

$$\|(x_j, |y_j|) - (x_{j+1}, r|y_{j+1}|)\| \leq \delta_1.$$

3.7 数值计算: 拟周期解与不变流形

本节首先数值地验证了定理 3.2.1 中拟周期解的存在性, 并且利用上一节的数值方法计算了扰动鞍点的稳定流形与不稳定流形. 基于这两个方面, 系统 3-1 的全局动力学有了一个较直观的图景.

不失一般性, 本节假设 $V(x, t)$ 是 π -周期的, 并设 $V(x, t) = \epsilon x \cos(2t)$, 其中 ϵ 为一个常数. 固定 $\xi = \pi/4$. 根据定理 3.2.1, 当 ϵ 较小时, 区域 I, II, III 都存在大量的拟周期解. 取 $\epsilon = 0.1$, 图 3-6, 3-7, 3-8 分别为以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$, $\{(x, y, t) : x = \xi, y < 0\}$, 和 $t = 0 \pmod{\pi}$ 为截面的 Poincaré 映射的相图, 其中不同颜色代表了不同的初始条件. 可以看到, 数值仿真结果与理论预期吻合.

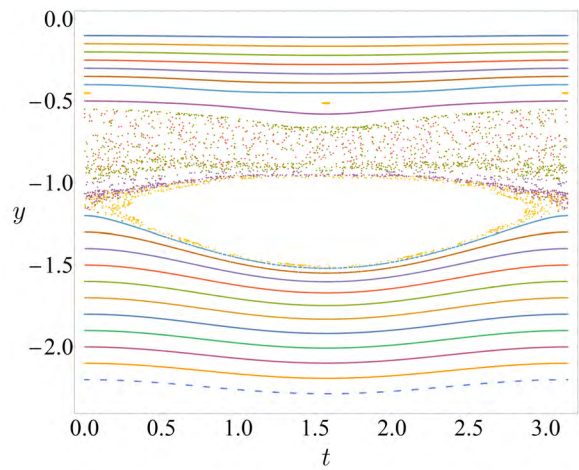
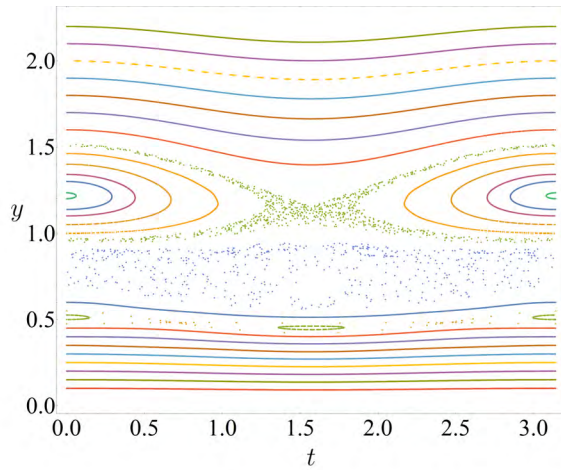


图 3-6 $\epsilon = 0.1$ 时以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$ 为截面的 Poincaré 映射相图. 图 3-7 $\epsilon = 0.1$ 时以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y < 0\}$ 为截面的 Poincaré 映射相图.

当 ϵ 增大时, KAM 理论不再能保证区域 I, II 中不变环面的存在性. 但根据定理 3.2.1 (ii), 在 $|y|$ 充分大的区域内, 动力学仍是近可积的. 取 $\epsilon = 0.8$, 图 3-9 为以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$ 截面的 Poincaré 映射的相图. 可看到区域 I, II 为混沌区域,

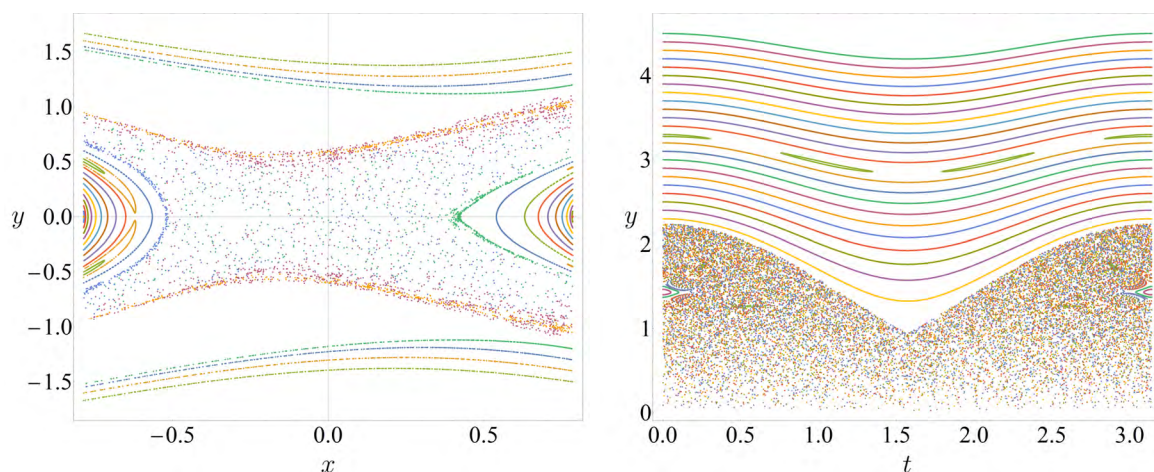


图 3-8 $\epsilon = 0.1$ 时以 $t = 0$ 为截面的 Poincaré 映射相图. 图 3-9 $\epsilon = 0.8$ 时以 $\{(x, y, t) : x = -\xi, y > 0\}$ 为截面的 Poincaré 映射相图.

而在能量较大的区域仍存在大量的不变曲线.

为了探究在未扰同宿轨道附近的动力学, 下面用本章上一节的方法计算扰动后的不变流形.

取 $\epsilon = 0.1$. 令 ϕ 为从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的时间- π -映射. 首先利用打靶法找到 ϕ 由 $(0, 0)$ 点扰动的不动点:

$$(x^*, y^*) = (0.02000020577986, 0).$$

矩阵 $D\phi((x^*, y^*))$ 的特征值与特征矢量分别为:

$$\lambda_1 = 23.1370608417321, v_1 = (0.707127994451262, 0.7070855672854144),$$

$$\lambda_2 = 0.043220709991704, v_2 = (-0.707127991753206, 0.707085569983632).$$

对映射 ϕ 以及一段长度为 0.01, 方向与 v_1 一致的直线, 应用上一节中的步骤 (1)-(5). 在此线段上均匀地取 100 个点, 令 $\delta_1 = 10^{-6}$, $\delta_2 = 0.005$, $m = 10$. 经过四次迭代, 图 3-10 展示了不动点 (x^*, y^*) 的不稳定流形的一个分支.

类似地可计算不稳定流形的另外一个分支以及稳定流形. 图 3-11 展示了所有的计算结果: 稳定流形的两个分支以及不稳定流形的两个分支. 图 3-12 显示了图 3-11 的一些局部放大.

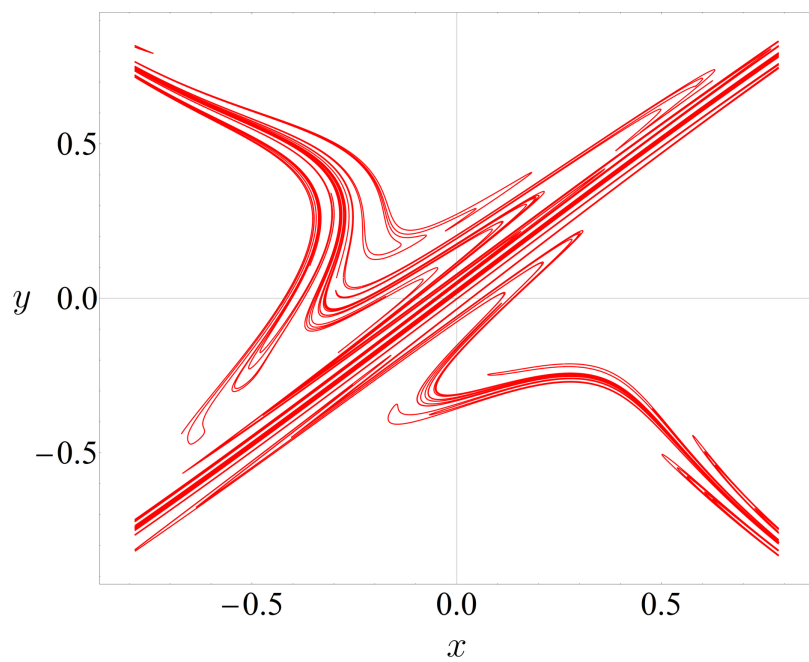


图 3-10 鞍点 (x^*, y^*) 不稳定流形的一支

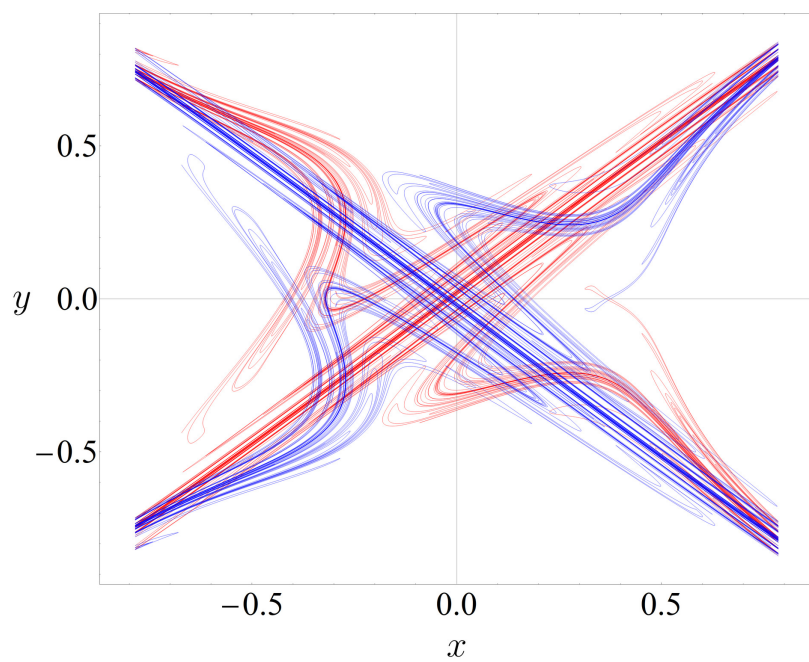


图 3-11 鞍点 (x^*, y^*) 的不稳定流形 (红) 与稳定流形 (蓝).

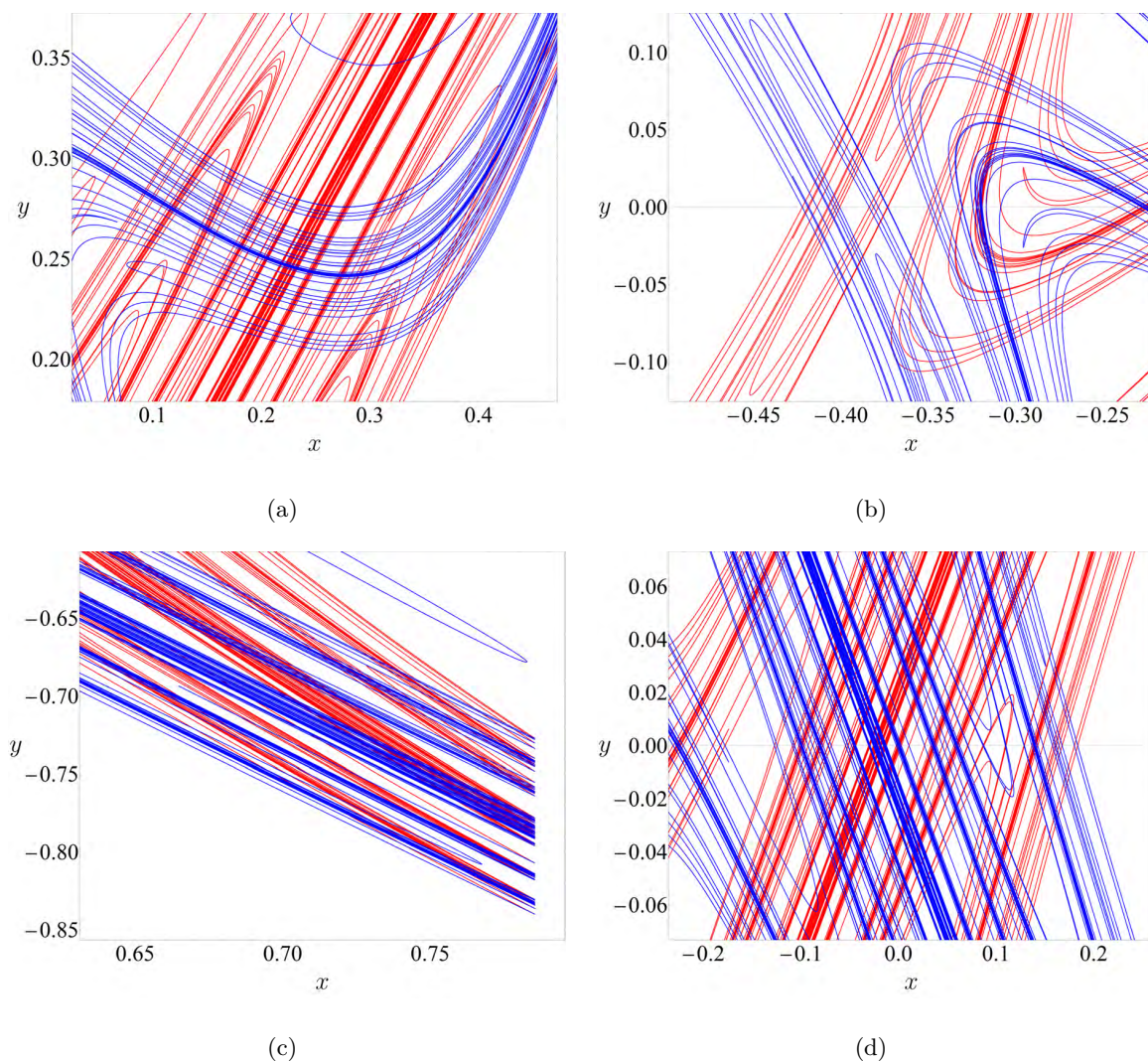


图 3-12 图 3-11 的一些局部放大.

从图 3-11 可看到稳定流形与不稳定流形关于 $y = 0$ 是对称的. 这实际上是由于外激励选取以及系统的特殊性, 下面说明当 ϵ 较小时稳定流形与不稳定流形关于 $y = 0$ 对称. 对于 $V(x, t) = \epsilon x \cos 2t$, 不难验证

$$(\varphi_1(0, -t, x_0, -y_0), -\varphi_2(0, -t, x_0, -y_0)) = (\varphi_1(0, t, x_0, y_0), \varphi_2(0, t, x_0, y_0)),$$

其中 $(\varphi_1(0, t, x_0, y_0), \varphi_2(0, t, x_0, y_0))$ 为方程 (3-1) 以初值 $x(0) = x_0, y_0 = y_0$ 的解. 由于碰撞是弹性的, 上式在碰撞过后仍成立. 特别地有

$$(\phi_1(x, y), -\phi_2(x, y)) = \phi^{-1}(x, -y),$$

其中 ϕ_i 为映射 ϕ 的分量. 若令 $\mathcal{R}(x, y) = (x, -y)$, 上式可写为

$$\mathcal{R} \circ \phi = \phi^{-1} \circ \mathcal{R}.$$

利用此对称性, 不难说明若映射 ϕ 的一个不变集为 A , 则 $\mathcal{R}(A)$ 也为不变集. 这解释了图 3-8 中不变曲线的对称性. 对于不动点 (x^*, y^*) , 可直接得到

$$\phi^{-1}(x^*, -y^*) = (x^*, -y^*).$$

由于扰动较小, 不动点 (x^*, y^*) 在 $(0, 0)$ 的附近是唯一的, 故 $y^* = 0$. 若点 (x, y) 在稳定流形上, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\phi^n(x, y) \rightarrow (x^*, 0),$$

那么当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$(\phi_1^n(x, y), -\phi_2^n(x, y)) \rightarrow (x^*, 0),$$

其中 ϕ_i^n 为映射 ϕ^n 的分量. 故当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\phi^{-n}(x, -y) \rightarrow (x^*, 0),$$

即点 $(x, -y)$ 在不稳定流形上. 因此, 不稳定流形与稳定流形关于 $y = 0$ 是对称的. 图 3-11 以及图 3-12 (b),(d) 说明这一结论是可靠的.

当 $\epsilon = 0.8$, 从图 3-9 可观察到低速区域是混沌的. 不稳定流形的一个分支在图 3-13 展示, 可看到其大范围的缠绕使得区域 I, II 无法出现大量的拟周期解. 并且从图 3-13 的局部放大图 3-14 可观察到不稳定流形在点 $(\xi, 0)$ 附近缠结得极其复杂. 在这里预测由于不稳定流形与碰撞面 $\{(x, y, t) : x = \xi\}$ 发生了擦切, 导致当不稳定流形在点 $(\xi, 0)$ 附近时, $D\phi$ 的某个特征值的绝对值非常大, 从而使得不稳定流形在擦切点附近有了急剧的扩张.

3.8 本章小结

本章在外激励的扰动为 C^5 类周期函数的条件下, 通过碰撞系统与一类非光滑 Hamilton 系统的等价变换, 作用量-角变量变换以及 KAM 理论, 得到了双面碰撞倒摆在低速以及高速区域不变环面的存在性; 给出了计算低速与高速区域之间扰动不变流形的数值算法; 在数值上, 验证了环面的存在性, 计算了带有碰撞效应的不变流形; 讨

论了当取定某类特殊的外激励时系统不变集的对称性; 最后, 利用本章设计的数值算法讨论了系统低速区域环面破坏的机理.

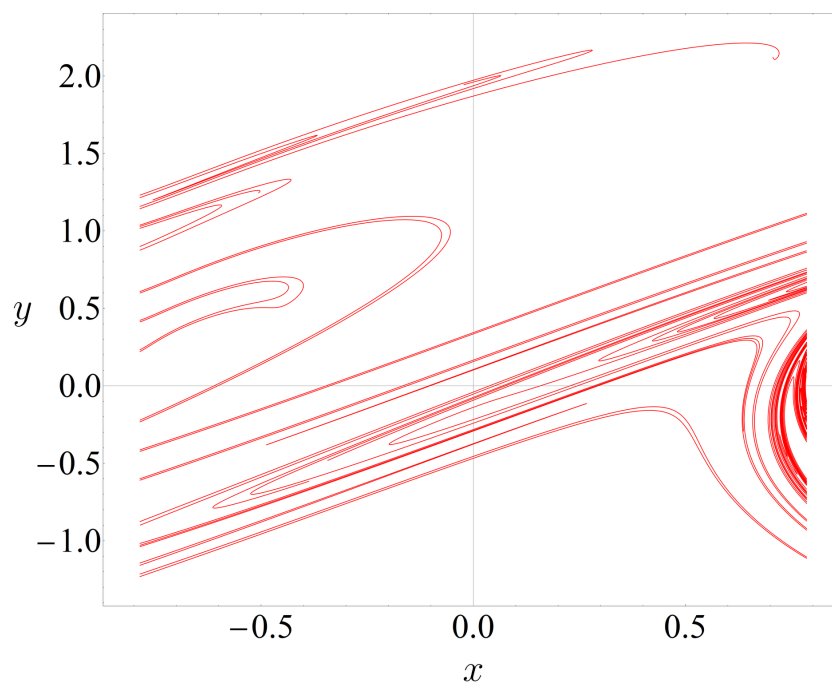


图 3-13 $\epsilon = 0.8$ 时不稳定流形的一支.

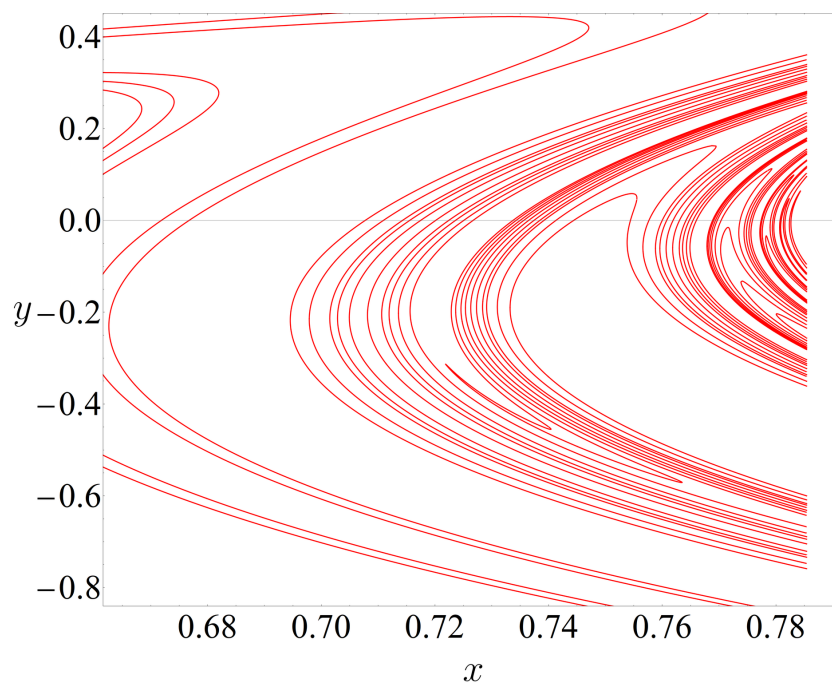


图 3-14 图 3-13 在擦切点附近的局部放大.

第四章 呼吸圆台球的不变环面与逃逸轨道

4.1 引言

继 Fermi-Ulam 模型之后, 非自治台球, 即构型空间的维数大于 1 且边界随时间变化的台球, 近年来受到广泛关注. 原因主要有两个方面, 一方面是由于非自治台球是 Fermi-Ulam 模型一个自然的高维推广, 而对于高维系统, 即便系统是充分光滑的, Fermi 加速现象也有可能以 Arnold 扩散的机制出现^[25, 40]; 另一方面也是由于许多物理模型以非自治台球的形式出现, 参见文献 [15, 62].

呼吸圆台球 (breathing circle billiard) 是非自治台球中最简单的一类, 由于系统的角动量的守恒性, 使得呼吸圆台球模型本质上为单自由度系统. Kamphorst 与 de Carvalho^[49] 证明了当呼吸圆台球的边界是 C^r ($r > 7$) 类的周期函数时, 系统在无穷远处存在大量的不变环面, 从而系统所有的解是有界的. 不同于文献 [49] 中的方法, 本章先研究约化后的单自由度碰撞系统, 一种新的 Fermi-Ulam 模型, 并证明了此系统所有的解的有界性. 此结果自然地包含了呼吸圆台球的稳定性. 角动量约化后的系统在原点是奇异的, 且系统存在运动的墙壁, 这给系统的处理带来极大的不便性. 本章对约化后的系统作了如下处理: 首先利用“停止墙壁”变换, 在损失了两阶光滑性后, 将系统化为了一个具有静止墙壁的单自由度非自治系统, 变换后的系统仍具有原系统的主要特征; 通过对作用量-角变量变换后扰动项导数的详细估计, 在高速区域, 得到了系统的扰动项及其各阶导数都相对于主要项较小这一结论; 最后, 通过类似上一章的处理方法, 交换时间与位置, 并应用 Moser 小扭转映射定理, 证明了无穷远处不变曲线的存在性.

上述不变环面的存在性是在较高的光滑性条件下证明的, 为了进一步探究环面破坏的机理, 本章还讨论在光滑性丧失的情况下, 系统 Fermi 加速轨道 (即能量随着时间趋于无穷的轨道) 的存在性. 具体地, 本章证明了, 如果半径函数是分段光滑的周期函数, 其导数在一个周期内存在一个间断点, 则在合适的参数下, 系统存在无界轨道.

KAM 理论在系统的光滑性丧失时会失效. Zharnitsky^[114] 首此在墙壁运动分段光滑时证明了 Fermi-Ulam 模型无界轨道的存在性. 对于弹跳球模型^[69] 与半圆外台球^[29], 也有类似的结果. 文献 [24] 还详细地研究了墙壁运动函数存在一个间断点时 Fermi-Ulam 模型动力学的统计性质. 文献 [24, 29] 的工作都基于对导数间断点附近的一个回归映射的分析. 此回归映射的主要部分为环面上的分段线性映射. 对于 $F : \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow$

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, 若对 $p \in \mathbb{R}^2$, 有

$$F^l(p) = p + (m, n), \quad l, m, n \in \mathbb{Z}, l, n > 0,$$

称 $p, F(p), \dots, F^{l-1}(p)$ 为 F 的一条加速周期轨道. 此分段线性映射加速周期轨道的稳定性蕴含了原系统无界轨道的存在性. 在半径函数是分段光滑的周期函数的条件下, 本章详细地推导了呼吸圆台球在奇异点附近的回归映射的表达式; 通过验证加速周期轨道的非退化条件, 证明了系统 Fermi 加速轨道的存在性. 这部分的结果及所用到的计算主要启发于文献 [24, 29].

4.2 呼吸圆台球模型的角动量约化及本章主要结果

假设平面内一个圆的边界由以下方程所控制

$$x^2 + y^2 = R^2(t),$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $R(t)$ 是严格大于 0 的 1-周期函数. 一个质点在此动圆内作自由运动, 且与圆的边界发生完全弹性碰撞, 见图 4-1. 此力学模型称为呼吸圆台球模型.

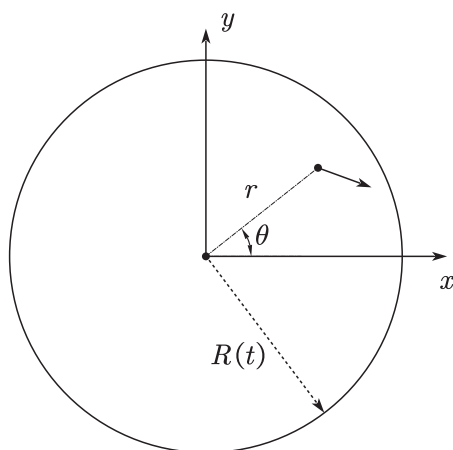


图 4-1 呼吸圆台球模型.

使用极坐标 (r, θ) , 上述系统的 Lagrange 函数为

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2.$$

由于做自由运动, 系统关于原点的角动量守恒. 具体地, 由 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

故质点做自由运动时 $r^2 \dot{\theta}$ 不变. 并且, 由弹性碰撞规则:

$$\text{当 } r = R(t), \dot{r}(t^+) = -\dot{r}(t^-) + 2\dot{R}(t),$$

角动量 $r^2 \dot{\theta}$ 在碰撞时也不发生改变. 因此呼吸圆台球的角动量是守恒的.

当 $r^2 \dot{\theta} = 0$ 时, 质点的运动限制在圆的一条直径上, 此时系统即为经典的双面碰撞 Fermi-Ulam 模型, 文献 [59] 中的结果可以应用在这个特殊情形下. 因此, 本章主要考虑 $r^2 \dot{\theta} \neq 0$ 不等于 0 的情况. 不失一般性, 假设

$$r^2 \dot{\theta} = 1.$$

当 $r^2 \dot{\theta} = 1$, 有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}, \text{ 即 } \ddot{r} = r \dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^3}.$$

角动量约化后得到一个单自由度碰撞系统

$$\ddot{r} = \frac{1}{r^3}, \quad (4-1)$$

其中 $0 < r \leq R(t)$, 墙壁运动为 $r = R(t)$. 此单自由度碰撞系统 (4-1) 即本章中研究的新的 Fermi-Ulam 模型. 经典的 Fermi-Ulam 模型描述一个质点在一端固定, 一端周期运动的墙壁之间作自由运动. 在系统 (4-1) 中, 固定的墙壁 $r = 0$ 的作用可用一个势能 $1/2r^2$ 代替. 这是由于系统 (4-1) 的 Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2r^2}.$$

当质点从右侧接近于 $r = 0$ 时, 由于其会受到一个极大的排斥力, 运动将会反向. 势能 $1/2r^2$ 引起的效应就如同质点在 $r = 0$ 处发生了弹性碰撞. 有着这类势能的系统在文献中被称作为“软台球”. 软台球系统的动力学与通常的台球有相似之处, 例如, 对于有限时间的解, 总可以用软台球的轨线去逼近真实台球的轨线^[9, 92, 110]. 并且, 可用此性质证明台球系统中周期轨道的存在性^[9, 110]. 然而, 有许多具有遍历性的台球, 其相应的软台球却具有椭圆型的周期轨道^[93], 这说明相应的软台球系统不可能是遍历的. 同时对于

可积的椭圆台球, 其相应的软台球模型却存在着大量的混沌轨道^[52]. 这些结果说明台球与其相应的软台球的动力学并不是等同的, 在许多情形下这两者的动力学甚至有着极大的差异. 因此研究系统 (4-1) 的动力学是有理论意义的, 不仅仅是因为此系统是呼吸圆台球角动量约化后的系统.

以下结论为本章的主要结果.

定理 4.2.1. 若 $R(t)$ 为 C^7 类的严格大于 0 的 1-周期函数, 则系统 (4-1) 在无穷远处存在不变环面. 特别地, 其所有的解都具有有界的能量.

推论 4.2.1. 对于呼吸圆台球: $x^2 + y^2 = R^2(t)$, 其中 $R(t)$ 为 C^7 类的严格大于 0 的 1-周期函数, 则其所有的解都具有有界的能量.

定理 4.2.2. 假设 1-周期函数 $R(t)$ 是分段光滑的且在一个周期内其导数仅有一个间断点. 不失一般性, 设此间断点在 $t = 0 \pmod{1}$ 处. 定义常数:

$$\Delta = R(0)(\dot{R}(0^+) - \dot{R}(0^-)) \int_0^1 \frac{1}{R^2(s)} ds.$$

那么当 $\Delta \in (2, 4) \setminus \{3\}$ 时, 呼吸圆台球 $x^2 + y^2 = R^2(t)$ 存在 *Fermi* 加速轨道 (能量随着时间趋于无穷的轨道).

4.3 “停止墙壁”变换与作用量-角变量变换

本节使用文献 [114] 中的变换将系统 (4-1) 转变为一个具有静止墙壁的单自由度非自治系统. 这样的处理虽然方便于作用量-角变量的构造, 但也使得系统的光滑性降低了两阶.

令

$$q = \frac{r}{R(t)}.$$

系统 (4-1) 变为

$$\ddot{r} = R\ddot{q} + 2\dot{R}\dot{q} + \ddot{R}q = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3q^3},$$

即

$$R\ddot{q} + 2\dot{R}\dot{q} + \ddot{R}q = \frac{1}{R^3q^3}. \quad (4-2)$$

为消去式 (4-2) 中含 $\dot{q}$ 的项, 引入新时间 $\tau = a(t)$, 其中 a 为一个可逆的光滑函数, a 的

定义将在稍后给出. 为了不混淆记号, 对于一个在旧的时间下的函数 $w(t)$, 令

$$w = w(a^{-1}(\tau)), \quad w' = \frac{d}{d\tau}(w(a^{-1}(\tau))), \quad w'' = \frac{d^2}{d\tau^2}(w(a^{-1}(\tau))),$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}(a^{-1}(\tau)), \quad \ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(a^{-1}(\tau)).$$

方程 (4-2) 在新的时间 τ 下变为

$$R\dot{a}^2 q'' + 2\dot{R}\dot{a}q' + R\ddot{a}q' + \ddot{R}q = \frac{1}{R^3 q^3}. \quad (4-3)$$

定义

$$\tau = a(t) = \int_0^t \frac{ds}{R^2(s)}.$$

由 τ 的定义, 函数 $R(a^{-1}(\tau))$ 将会是以 $\int_0^1 \frac{ds}{R^2(s)}$ 为周期的函数, 且其光滑阶数与函数 R 的光滑阶数一致. 由 a 的定义可得到

$$R^2\dot{a} = 1, \quad 2\dot{R}\dot{a} + R\ddot{a} = 0.$$

故方程 (4-3) 在新时间下为

$$R\dot{a}^2 q'' + \ddot{R}q = \frac{1}{R^3 q^3}.$$

将 $\dot{a}$ 用 $\frac{1}{R^2}$ 替换, 最终得到方程

$$q'' + R^3 \ddot{R}q = \frac{1}{q^3}. \quad (4-4)$$

注意到墙壁 $r = R(t)$ 在新坐标下为 $q = 1$. 对于碰撞规则, 利用定义有

$$\begin{aligned} \dot{r}(t^+) + \dot{r}(t^-) = 2\dot{R}(t) &\Leftrightarrow \dot{R}(t^+)q(t^+) + \dot{R}(t^+)\dot{q}(t^+) + \dot{R}(t^-)q(t^-) + \dot{R}(t^-)\dot{q}(t^-) = 2\dot{R}(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{R}(q'(\tau^+) + q'(\tau^-)) = 0, \end{aligned}$$

上式的推导用到了以下等式 $q(t^+) = q(t^-) = 1, \dot{R}(t^+) = \dot{R}(t^-) = \dot{R}(t)$. 故在新的坐标以及时间下, 碰撞规则变为了在 $q = 1$ 的完全弹性碰撞规则.

综上, 利用“停止”墙壁变换, 系统 (4-1) 变换成系统 (4-4), 墙壁变为 $q = 1$ 且碰

撞是完全弹性的. 为了方便起见, 仍用 “.” 表示对时间的导数. 令

$$R^3(a^{-1}(\tau))\ddot{R}(a^{-1}(\tau)) = g(\tau).$$

将时间的记号换回 t 并假设函数 g 是 1-周期的. 由于 $R(t)$ 是 C^7 类的周期函数, 故 $g(t)$ 是 C^5 类的函数. 方程 (4-4) 在新的记号下为

$$\ddot{q} = \frac{1}{q^3} - g(t)q, \quad (4-5)$$

其中 $0 < q \leq 1$, 当 $q(t) = 1$ 时, $\dot{q}(t^+) = -\dot{q}(t^-)$.

系统 (4-5) 的 Hamilton 量为

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2}g(t)q^2,$$

其中 $p = \dot{q}$. 可以看到, 变换后系统的 Hamilton 量仅与原系统的 Hamilton 量差了一项 $\frac{1}{2}g(t)q^2$. 由于质点的运动被限制在区间 $(0, 1]$ 内, 当能量较大时, $\frac{1}{2}g(t)q^2$ 是相对较小的量. 故至少从直觉上, 可将 $\frac{1}{2}g(t)q^2$ 当作一个扰动, 这与本章开始所说的“停止墙壁”变换将保留系统的主要特征一致.

下面进行作用量-角变量变换. 考虑未扰系统

$$\ddot{q} = \frac{1}{q^3},$$

其中 $0 < q \leq 1$, 当 $q = 1$ 时, $\dot{q}(t^+) = -\dot{q}(t^-)$. 未扰系统的 Hamilton 量为

$$H_0(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2q^2}, \quad (4-6)$$

其中 $p = \dot{q}$. 系统 (4-6) 的相图结构, 即函数 H_0 的等势线, 如图 4-2 所示.

同处理倒摆低速碰撞运动时相似, 下面定义作用量-角变量变换. 不同的是, 由于要处理能量较大时的情形, 还需要对一些重要的量作估计.

令 $I(h)$ 为等势线 $\{(p, q) : H_0(p, q) = h, 0 < q \leq 1\}$ 及其关于 $q = 1$ 的镜像所围的面积, 见图 4-3. 由定义有

$$I(h) = 4(\sqrt{2h-1} - \int_0^{\sqrt{2h-1}} \frac{1}{\sqrt{2h-p^2}} dp) = 4\sqrt{2h-1} - 4 \arctan \sqrt{2h-1}. \quad (4-7)$$

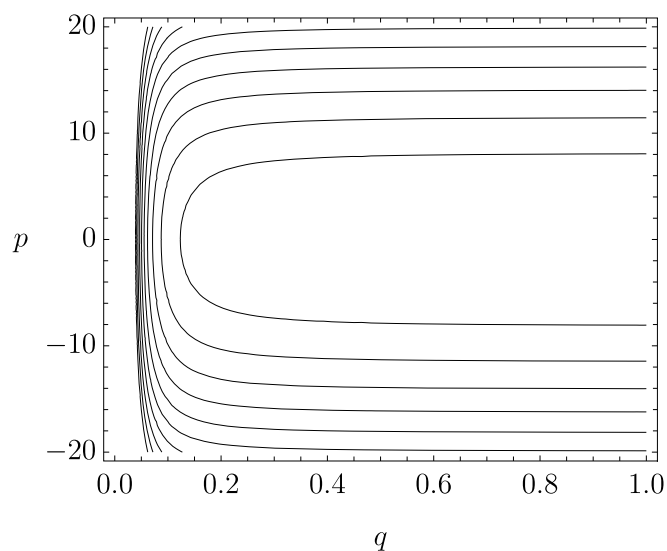
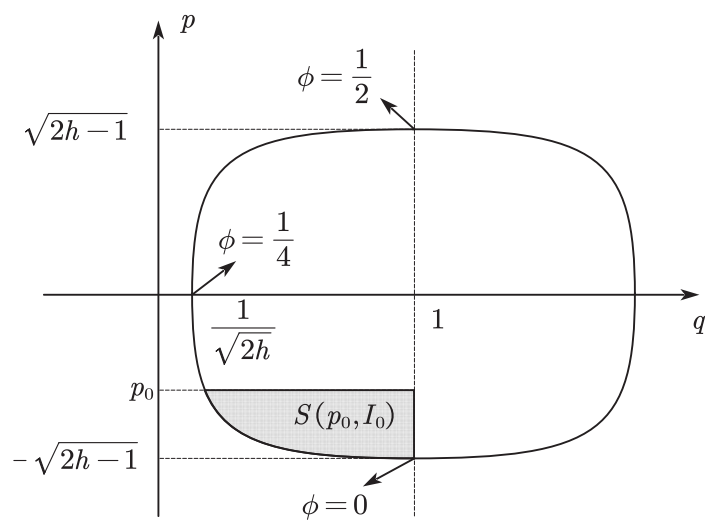
图 4-2 H_0 的等势线.

图 4-3 作用量-角变量坐标.

由式 (4-7), 当 $h > 1/2$, $I(h)$ 是 C^∞ 类的函数. 当 $h > 1$, 有

$$I'(h) = \frac{2\sqrt{2h-1}}{h} > 0, \quad (4-8)$$

$$I''(h) = \frac{2(1-h)}{h^2\sqrt{2h-1}} < 0. \quad (4-9)$$

故当 I 充分大, 可得到反函数 $h(I)$, 其满足

$$I(h(I)) = I, \quad h'(I) > 0, \quad h''(I) > 0. \quad (4-10)$$

在本节, 始终假设 I 充分大, 因此式 (4-8), (4-9) 始终成立.

定义生成函数:

$$S(p, I) = \int_{-\sqrt{2h(I)-1}}^p (-q(s, I) + 1) ds,$$

其中 $p \in [-\sqrt{2h(I)-1}, \sqrt{2h(I)-1}]$, $q(p, I)$ 满足

$$h(I) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2q(p, I)^2}, \text{ 即 } q(p, I) = \frac{1}{\sqrt{2h(I)-p^2}}.$$

由生成函数 S 的定义, $S(p_0, I_0)$ 为由 $p = p_0$, $q = 1$, 与固定等势线 (即确定了 I_0) 所围的面积, 即图 4-3 中阴影区域的面积. 辛变换 $(I, \phi) \mapsto (p, q)$ 由以下式子所定义:

$$-q + 1 = S_p(p, I), \quad (4-11)$$

$$\phi = S_I(p, I). \quad (4-12)$$

由于

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(p, I) = \frac{\partial^2 S}{\partial I \partial p} = \frac{h'(I)}{(2h(I) - p^2)^{3/2}} > 0, \quad (4-13)$$

可从式 (4-12) 中确定 $p(I, \phi)$. 将式 (4-11) 中的 p 由 $p(I, \phi)$ 替换, 可确定 $q(I, \phi)$. 因此变换 $(I, \phi) \mapsto (p, q)$ 就定义好了.

首先说明 $\phi \in [0, 1/2]$. 由式 (4-12), 直接计算可得到

$$\begin{aligned} \phi(p, I) = S_I(p, I) &= \frac{\partial}{\partial I} \int_{-\sqrt{2h(I)-1}}^p \left(-\frac{1}{\sqrt{2h(I)-s^2}} + 1 \right) ds \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(-\arctan \frac{p}{\sqrt{2h(I)-p^2}} - \arctan \sqrt{2h(I)-1} + p + \sqrt{2h(I)-1} \right) \\ &= \frac{h'(I)}{2h(I)} \left(\frac{p}{\sqrt{2h(I)-p^2}} + \sqrt{2h(I)-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{p}{4\sqrt{(2h(I)-1)(2h(I)-p^2)}}, \end{aligned} \quad (4-14)$$

最后一步推导用到了

$$h'(I) = \frac{1}{I'(h(I))} = \frac{h(I)}{2\sqrt{2h(I)-1}}, \quad (4-15)$$

$I'(h)$ 的表达式见式 (4-8). 利用式 (4-14) 可观察到当 $p = -\sqrt{2h-1}, 0, \sqrt{2h-1}$, $\phi = 0, 1/4, 1/2$, 见图 4-3. 由 (4-13), 当 I 固定时 $\phi(p, I)$ 关于 p 是递增的函数, 而 $p \in [-\sqrt{2h-1}, \sqrt{2h-1}]$. 故 $\phi \in [0, 1/2]$.

现在推导由 ϕ 与 $h(I)$ 表示的 $q(I, \phi)$ 的显式表达式. 根据式子 (4-14) 可得到

$$p^2(I, \phi) = \frac{2h(I)(4\phi - 1)^2(2h(I) - 1)}{1 + (4\phi - 1)^2(2h(I) - 1)}.$$

将上式带入得到

$$q(I, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2h(I) - p^2(I, \phi)}} = \sqrt{(1 - 4\phi)^2 + \frac{4(1 - 2\phi)\phi}{h(I)}}. \quad (4-16)$$

本节中, 设 k, l 始终是大于等于 0 的整数, 及

$$0 < c_k \leq C_k, 0 < c_{k,l} \leq C_{k,l}$$

为常数. 以下关于函数 $I(h)$, $h(I)$, 与 $q(I, \phi)$ 的估计对接下来的分析是至关重要的.

引理 4.3.1. 当 h, I 充分大, $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$ 时, 函数 $I(h)$, $h(I)$, 与 $q(I, \phi)$ 都是 C^∞ 类的函数. 并且当 h, I 充分大时有

$$(i) \quad c_k h^{1/2-k} \leq |I^{(k)}(h)| \leq C_k h^{1/2-k};$$

$$(ii) \quad c_k I^{2-k} \leq |h^{(k)}(I)| \leq C_k I^{2-k};$$

$$(iii) \quad \left| \frac{\partial^k q}{\partial I^k}(I, \phi) \right| \leq c_k I^{-k},$$

其中 $k \geq 0$, $I^{(k)}(h) = \frac{d^k I}{dh^k}$, $h^{(k)}(I) = \frac{d^k h}{dI^k}$.

证明: 函数 I, h, q 的光滑性可由式 (4-7), $h(I(h)) = h$, 以及 (4-16) 直接得到. 当 $k = 0$, 估计 (i) 由 I 的定义 (4-7) 直接得到. 利用归纳法可证明当 $i \geq 1$,

$$I^{(i)}(h) = P_i(h) \frac{(2h - 1)^{1/2-i}}{h^i},$$

其中 P_i 为 i 次的多项式. 因此估计 (i) 已证.

下面说明当 $k = 0, 1$ 时, 估计 (ii) 与 (iii) 成立. $k \geq 2$ 的情形可用文献 [54, Appendix] 中的方法归纳得到. 为了避免引起混淆, 引入变量 s . 由 $k = 0$ 时的估计 (i) 以及函数 h 的单调性, 可得到

$$h(c_0 s^{\frac{1}{2}}) \leq s \leq h(C_0 s^{\frac{1}{2}}).$$

上式蕴含了 $k = 0$ 时的估计 (ii). 关于 $h'(I)$ 的估计可直接由公式 (4-15) 得到. 对于 $k = 0$ 时的估计 (iii), 由于 $q \in (0, 1]$, 此情况是平凡的. 对式 (4-16) 直接求导可得

$$|\frac{\partial q}{\partial I}(I, \phi)| = |\frac{2\phi(2\phi-1)h'(I)}{h^2(I)q(I, \phi)}| \leq |\frac{2\phi(2\phi-1)h'(I)}{h^2(I)q(I, 1/4)}| = |\frac{2\phi(2\phi-1)h'(I)\sqrt{2h(I)}}{h^2(I)}|,$$

这里用到了 $q(I, \phi) \geq q(I, 1/4) = 1/\sqrt{2h(I)}$, 见图 4-3. 由 (ii), 当 I 充分大时有 $|\partial q/\partial I| \leq c_1 I^{-2} \leq c_1 I^{-1}$. 这证明了 $k = 1$ 情况下的估计 (iii). 最后注意到, 估计 (iii) 并不是最优的. 实际上, 对于 $k \geq 1$ 有

$$|\frac{\partial^k q}{\partial I^k}(I, \phi)| \leq c_k I^{-k-1}.$$

但由于 $c_0 I^{-1} \leq 1/\sqrt{2h(I)} \leq q(I, \phi) \leq 1$ 且 $q(I, 0) = 1$, 上式在 $k = 0$ 时并不成立. 为了方便起见, 这里取了 (iii) 的形式, 且 (iii) 对于下一节的估计是足够的. $\square$

4.4 高速区域的扭转映射

这一节将把系统在能量较大的区域的动力学化作一个小扭转映射. 由于接下来的变换较多, 这里给出了最主要的变换与记号:

$$\begin{aligned} (p, q, H, t) &\xrightarrow[\text{变换}]{\text{作用量-角变量}} (I, \phi, H, t) \xrightarrow[\text{变换}]{\text{尺度化}} (\epsilon I, \phi, \epsilon^2 H, \frac{t}{\epsilon}) = (P, \phi, E, T) \\ &\xrightarrow[\text{的交换}]{\text{时间与角度}} (\epsilon^2 H, t, \epsilon^2 I, \phi) = (E, t, M, \phi) \quad (4-17) \end{aligned}$$

其中 $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 分别为广义动量, 广义坐标, Hamilton 量与时间. (4-17) 中的每一个变换都将一个 Hamilton 系统转变为另一个 Hamilton 系统. 参见本文第二章 2.2 节.

在上一节中的作用量-角变量下, 系统 (4-5) 的 Hamilton 量为

$$H(I, \phi, t) = h(I) + \frac{1}{2}g(t)q^2(I, \phi).$$

引入小参数 $\epsilon > 0$. 由微分形式

$$\epsilon(Id\phi - Hdt) = \epsilon Id\phi - \epsilon^2 Hd\frac{t}{\epsilon}$$

关于 Hamilton 方程积分曲线的不变性, 可取 $(P, \phi, E, T) = (\epsilon I, \phi, \epsilon^2 H, \frac{t}{\epsilon})$ 分别为广义

动量, 广义坐标, Hamilton 量与时间. 新坐标下的 Hamilton 量为

$$E(P, \phi, T) = \epsilon^2 h\left(\frac{P}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 g(\epsilon T) q^2\left(\frac{P}{\epsilon}, \phi\right). \quad (4-18)$$

固定 $P \in [1, 2]$. 注意到由于 $P = \epsilon I$, 当 ϵ 很小即意味着初始的能量很大. 由引理 4.3.1, 以下估计对充分小的 ϵ 成立:

$$c_k \leq \left| \frac{d^k}{dP^k} \epsilon^2 h\left(\frac{P}{\epsilon}\right) \right| \leq C_k, \quad (4-19)$$

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial P^k \partial t^l} \frac{1}{2} \epsilon^2 g(t) q^2\left(\frac{P}{\epsilon}, \phi\right) \right| \leq C_{k,l} \epsilon^2, \quad (4-20)$$

其中 $0 \leq k + l \leq 5$. 由 $P \in [1, 2]$, 从式 (4-18), (4-20) 可得到

$$E \in [\epsilon^2 h\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2), \epsilon^2 h\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2)].$$

由 (4-19) 以及函数 h 的严格单调性 (见 (4-10)), 可取一个不依赖于 ϵ 的非空区间 $[h_0, h_1]$ ($h_0 > 0$) 使得

$$E \in [h_0, h_1] \subset [\epsilon^2 h\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2), \epsilon^2 h\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2)].$$

在 (4-17) 中的前两个变换已经完成之后, 现在取 ϕ 作为新的时间, 完成 (4-17) 中的最后一步变换. 具体地, 由于

$$\epsilon(Pd\phi - EdT) = -(Ed\epsilon T - \epsilon Pd\phi) = -(Edt - \epsilon Pd\phi),$$

取 $(E, t, M, \phi) = (E, \epsilon T, \epsilon P, \phi)$ 分别为广义动量, 广义坐标, Hamilton 量与时间. 根据估计 (4-10), (4-18), (4-19) 和 (4-20), 当 ϵ 充分小时,

$$\frac{\partial E}{\partial P}(P, \phi, t/\epsilon) \geq C_0 > 0,$$

在 $(P, \phi, t) \in [1, 2] \times [0, 1/2] \times S^1$ 上成立. 因此, 可从式 (4-18) 形式上地得到反函数

$$P(E, t, \phi, \epsilon) = \epsilon I\left(\frac{E}{\epsilon^2}\right) + I_1(E, t, \phi, \epsilon), \quad (4-21)$$

其中 I_1 满足

$$\epsilon^2 h \left(I \left(\frac{E}{\epsilon^2} \right) + \frac{1}{\epsilon} I_1(E, t, \phi, \epsilon) \right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 g(t) q^2 \left(I \left(\frac{E}{\epsilon^2} \right) + \frac{1}{\epsilon} I_1(E, t, \phi, \epsilon), \phi \right) = E. \quad (4-22)$$

由 M 的定义,

$$M(E, t, \phi, \epsilon) = \epsilon P(E, t, \phi, \epsilon) = \epsilon^2 I \left(\frac{E}{\epsilon^2} \right) + \epsilon I_1(E, t, \phi, \epsilon). \quad (4-23)$$

函数 $M(E, t, \phi, \epsilon)$ 相应的 Hamilton 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\phi} &= \frac{\partial M}{\partial E} = I' \left(\frac{E}{\epsilon^2} \right) + \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial E}(E, t, \phi, \epsilon), \\ \frac{dE}{d\phi} &= - \frac{\partial M}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial I_1}{\partial t}(E, t, \phi, \epsilon). \end{aligned} \quad (4-24)$$

为得到 Moser 小扭转映射定理中的形式, 还需要进行最后一步变换令

$$2\epsilon \bar{E} := I' \left(\frac{E}{\epsilon^2} \right) = \frac{2\epsilon \sqrt{2E - \epsilon^2}}{E}, \text{ 即 } E = \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}{\bar{E}^2}. \quad (4-25)$$

由 $E \in [h_0, h_1]$ 与 $\bar{E}$ 的定义, 可取一个不依赖于 ϵ 的非空开区间 $[\bar{h}_0, \bar{h}_1]$, 使得对于 $E \in [h_0, h_1]$, 有 $\bar{E} \in [\bar{h}_0, \bar{h}_1]$ ($\bar{h}_0 > 0$).

在坐标 $(\bar{E}, t)$ 下, 方程 (4-24) 转变为

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\phi} &= 2\epsilon \bar{E} + I_2(\bar{E}, t, \phi, \epsilon), \\ \frac{d\bar{E}}{d\phi} &= I_3(\bar{E}, t, \phi, \epsilon), \end{aligned} \quad (4-26)$$

其中

$$I_2(\bar{E}, t, \phi, \epsilon) = \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial E} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}{\bar{E}^2}, t, \phi, \epsilon \right), \quad (4-27)$$

$$I_3(\bar{E}, t, \phi, \epsilon) = \frac{\partial \bar{E}}{\partial E} \frac{\partial I_1}{\partial t} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}{\bar{E}^2}, t, \phi, \epsilon \right), \quad (4-28)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial E} = - \frac{\epsilon \bar{E}^3 (1 - \epsilon^2 \bar{E}^2 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2})}{(1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2})^2 \sqrt{2 - \epsilon^2 \bar{E}^2 + 2\sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}}.$$

在 $\phi \in [0, 1/2]$ 上形式地积分方程 (4-26), 最终得到了扭转映射

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \epsilon \bar{E}_0 + N_1(\bar{E}_0, t_0, \epsilon), \\ \bar{E}_1 &= \bar{E}_0 + N_2(\bar{E}_0, t_0, \epsilon). \end{aligned} \quad (4-29)$$

映射 (4-29) 与 Moser 小扭转定理中的映射具有相同的形式. 由于扭转映射为一个系统的时间截面映射, 而此系统共轭于一个 Hamilton 系统, 故图交性质也成立. 因此若存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \bar{E}_0^k \partial t_0^l} N_i(\bar{E}_0, t_0, \epsilon) \right| \leq \epsilon^{1+\nu}, (i = 1, 2), \quad (4-30)$$

在 $(\bar{E}_0, t_0) \in [\bar{h}_0, \bar{h}_1] \times S^1$ 上成立, 其中 $0 \leq k + l \leq 4$, $\nu > 0$ 为常数, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, 则映射 (4-29) 满足 Moser 小扭转定理的条件.

估计 (4-30) 的证明: 当 I 充分大时, $h'(I) > 0$. 根据式 (4-19), (4-20) 以及隐函数定理, 式 (4-21) 中的反函数 P 定义完好. 并且, 由引理 4.3.1 (i) 以及估计 (4-20), 当 ϵ 充分小时有

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial E^k \partial t^l} I_1(E, t, \phi, \epsilon) \right| \leq C_{k,l} \epsilon^2 \quad (4-31)$$

在 $(E, t, \phi) \in [h_0, h_1] \times S^1 \times [0, 1/2]$ 上成立 ($0 \leq k + l \leq 5$). 注意到 $\bar{E} \in [\bar{h}_0, \bar{h}_1]$ ($\bar{h}_0 > 0$), 因此 $\partial \bar{E} / \partial E$ 与 $(1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}) / \bar{E}^2$ 及其导数都是有界的. 故根据 I_2, I_3 的定义 (见 (4-27), (4-28)), 当 ϵ 充分小时函数 I_2, I_3 满足:

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \bar{E}^k \partial t^l} I_j(\bar{E}, t, \phi, \epsilon) \right| \leq C_{k,l} \epsilon^3, \quad (4-32)$$

其中 $j = 2, 3$, $(\bar{E}, t, \phi) \in [\bar{h}_0, \bar{h}_1] \times S^1 \times [0, 1/2]$, $0 \leq k + l \leq 4$. 根据解对初值的可微依赖性 (参见 [70, Lemma 1]), 对方程 (4-26) 我们有

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \bar{E}^k \partial t^l} N_j(\bar{E}, t, \epsilon) \right| \leq C_{k,l} \epsilon^3, \quad (4-33)$$

其中 $j = 1, 2$, $(\bar{E}, t) \in [\bar{h}_0, \bar{h}_1] \times S^1$, $0 \leq k + l \leq 4$, ϵ 充分小. 取 ϵ_0 充分小使得 $\max_{k+l \leq 4} C_{k,l} \epsilon^3 \leq \epsilon^{1+\nu}$, 其中 $\nu > 0$ 为常数. 因此估计 (4-30) 可由式 (4-33) 得到. $\square$

下面完成定理 4.2.1 的证明. 由 Moser 小扭转定理, 映射 (4-29) 在区域

$$(\bar{E}, t) \in [\bar{h}_0 + O(\epsilon^{1+\nu}), \bar{h}_1 + O(\epsilon^{1+\nu})] \times S^1$$

具有同伦非平凡的不变曲线, 其中 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, ϵ_0 为一个充分小的常数. 回溯变换 (4-25) 与 (4-17), 可知

$$\epsilon^2 H = E = \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}{\bar{E}^2},$$

即

$$H = \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{E}^2}}{\epsilon^2 \bar{E}}.$$

由于 $(\bar{E}, t) \in [\bar{h}_0 + O(\epsilon^{1+\nu}), \bar{h}_1 + O(\epsilon^{1+\nu})] \times S^1$, 同伦非平凡的不变曲线存在于如下区域

$$(H, t) \in \mathcal{U}_\epsilon := \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{h}_1^2 + O(\epsilon^{3+\nu})}}{\epsilon^2 \bar{h}_1 + O(\epsilon^{3+\nu})}, \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2 \bar{h}_0^2 + O(\epsilon^{3+\nu})}}{\epsilon^2 \bar{h}_0 + O(\epsilon^{3+\nu})} \right] \times S^1 = \\ \left[\frac{2}{\epsilon^2 \bar{h}_1} + O\left(\frac{1}{\epsilon^{1-\nu}}\right), \frac{2}{\epsilon^2 \bar{h}_0} + O\left(\frac{1}{\epsilon^{1-\nu}}\right) \right] \times S^1. \quad (4-34)$$

注意到 $0 < \bar{h}_0 < \bar{h}_1, \nu > 0$, 且 $\bar{h}_0, \bar{h}_1, \nu$ 都为不依赖于 ϵ 的参数. 因此, 根据 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的定义, 可取序列 $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon_i \rightarrow 0$, 且对 $j \neq k$

$$\mathcal{U}_{\epsilon_j} \cap \mathcal{U}_{\epsilon_k} = \emptyset.$$

由于当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\mathcal{U}_{\epsilon_i}$ 可以任意地接近于 $\infty \times S^1$, 在任意大的能量区域内都存在有不变曲线. 而这为系统 (4-1) 的解提供了一个障碍, 即系统 (4-1) 所有的解都具有有界的能量.

现在回到呼吸圆台球模型. 对任意 $r^2 \dot{\theta} = c \neq 0$ 的解, 角动量约化后的系统为

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3}, \quad (4-35)$$

其中 $0 < r \leq R(t)$, $r = R(t)$ 为刚性墙壁. 则重复对 $r^2 \dot{\theta} = 1$ 的情形下的处理, 可证明系统 (4-35) 所有的解都具有有界能量. 由能量函数的定义, 这意味着 r 不能任意地接近于 0 且 $\dot{r}$ 是有界的. 由于 $r^2 \dot{\theta} = c$, 这意味着 $\dot{\theta}$ 也是有界的, 故质点的能量始终有界. 当 $r^2 \dot{\theta} = 0$, 此时质点的运动限制在一条直径上. 在此情形下, 文献 [59] 中的结果可以得到应用, 即此时质点的能量也有界. 综合这两条论述, 推论 4.2.1 得到证明.

4.5 隐式碰撞映射及奇点附近的范式映射

我们接下来考虑 $R(t)$ 仅为分段光滑时呼吸圆台球在高速区域的动力学. 考虑呼吸圆台球 $x^2 + y^2 = R^2(t)$, 其中 $R(t)$ 为一个 1-周期的分段光滑函数, 其导数在一个周期内仅有一个间断点. 不失一般性, 假设此间断点在 $t = 0 \pmod{1}$ 处. 由角动量约化 (见本章第一节), 系统为

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = -1/r^3. \end{cases} \quad (4-36)$$

其中 $v = \dot{r}$, $0 < r \leq R(t)$, 在 $r = R(t)$ 处有一刚性墙壁. 这里角动量约化时, 仍取 $r^2 \dot{\theta} = 1$.

取碰撞面 $\{(r, v, t) : r = R(t), v < 0\}$ 作为 Poincaré 截面, 取碰撞的瞬时 t 以及碰撞后的速度的绝对值作为 Poincaré 映射的变量. 记此 Poincaré 映射为 f . f 并不是显式定义的, 但可以利用系统 (4-36) 的基本性质给出一个隐式的定义. 在给出这个隐式定义之前, 先来定义一个函数, 此函数即 $R(t)$ 为常量时, 系统 (4-36) 的轨线运动的周期.

固定参数 λ , 令固定的墙壁位置为 $R(\lambda)$. 此时系统 (4-36) 是不依赖于时间的. 假设轨线碰撞完以后速度的绝对值为 v , 则此时轨线运动的周期为

$$T(\lambda, v) = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2H}}}^{R(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2H - \frac{1}{q^2}}} dq = \frac{2HR^2(\lambda) - 1}{H} = \frac{2vR^3(\lambda)}{1 + v^2R^2(\lambda)}, \quad (4-37)$$

其中用到了 $H = \frac{1}{2}(v^2 + \frac{1}{R^2(\lambda)})$. 见图 4-4 (a), 其中轨线在两个黑点之间的运动的时间已被标注出来.

下面给出 f 的表达式:

$$f(t, v) = (t', v') = (t + \delta(t, v), \sqrt{v^2 + \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{R^2(t + \delta(t, v))} - 2\dot{R}(t + \delta(t, v))}), \quad (4-38)$$

其中 $\delta(t, v)$ 满足

$$\delta(t, v) = \frac{1}{2} \left(T(t, v) + T(t + \delta(t, v), \sqrt{v^2 + \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{R^2(t + \delta(t, v))}}) \right). \quad (4-39)$$

这里说明如何得到式 (4-38), (4-39). 由 $t' = t + \delta(t, v)$, $\delta(t, v)$ 是相邻两次碰撞的时间间隔. 由函数 T 的定义, 轨线从碰撞面到达 $v = 0$ 的时间为 $T(t, v)/2$, 从 $v = 0$ 再次到达碰撞面的时间为 $T(t + \delta(t, v), \tilde{v})/2$, 其中 $\tilde{v}$ 为轨线刚好到达碰撞面的速度, 见图

4-4 (b). 由于当碰撞未发生时, 能量守恒, 故有

$$\frac{1}{2}(v^2 + \frac{1}{R^2(t)}) = \frac{1}{2}(\tilde{v}^2 + \frac{1}{R^2(t + \delta(t, v))}), \text{ 即 } \tilde{v} = \sqrt{v^2 + \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{R^2(t + \delta(t, v))}},$$

从上式即可得到 (4-39). 图 4-4 给出了一个得到式子 (4-39) 的一个较直观的方式. 由碰撞规则以及映射 f 的变量的定义 (v' 为碰撞后速度的绝对值), 用 $\tilde{v}$ 的表达式可得到 (4-38) 中 v' 的表达式.

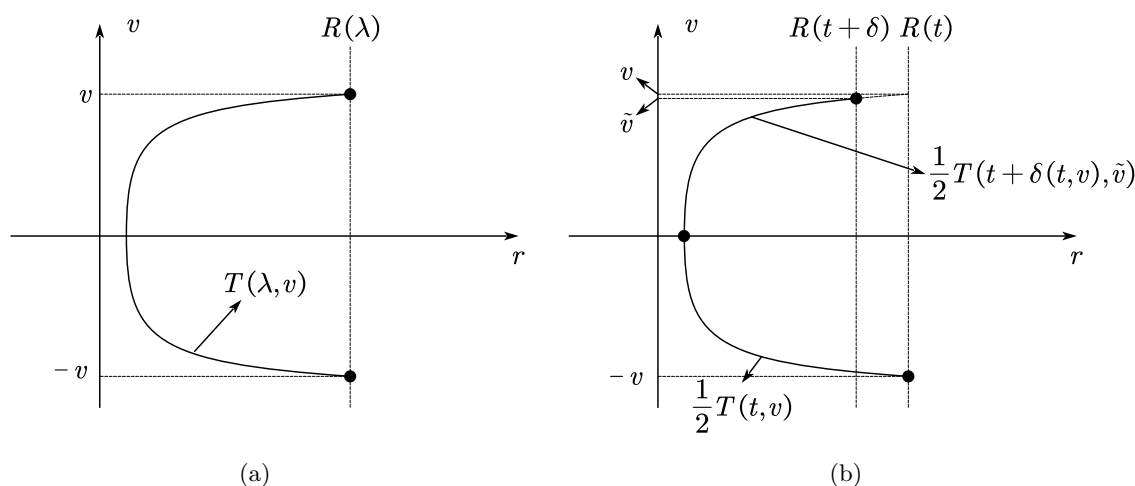


图 4-4 $T(\lambda, v)$ 与 $\delta(t, v)$ 的定义示意图.

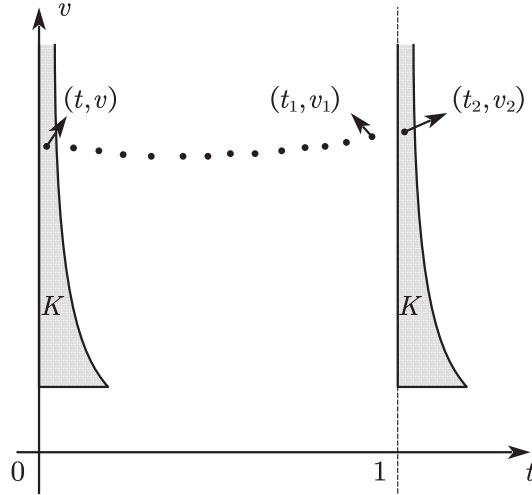
为了记号的简洁性, 引入记号 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > L\}$, 其中 $L > 0$ 为一个充分大的常数, 且 L 可以变化. 如 $f: S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+$, 指的是存在充分大的常数 $L_1, L_2 > 0$ 使得当 $v > L_1$ 时, $v' > L_2$.

为了研究在导数间断点附近的动力学, 引入回归映射 F . 具体地, 令 K 为由 $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ 及此直线在 f 下的像 $f(\{0\} \times \mathbb{R}^+)$ 所围成的区域, 此区域包含边界 $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ 但不包含 $f(\{0\} \times \mathbb{R}^+)$. 图 4-5 给出了区域 K 的一个示意图. 区域 K 在 f 下的首次回归映射记为 $F: K \rightarrow K$.

若存在常数 $\delta > 0$ 使得对充分大的 J , 有 $|a - b| \geq \delta/J^k$, 称 a 与 b 的距离至少是 $O(J^{-k})$. 对 $R(t)$ 作如上的假设, 以下定理在适当的坐标下给出了映射 F 表达式的主要项.

定理 4.5.1. 存在 K 上的光滑坐标 (τ, J) 使得 K 在此坐标下为 $[0, 1) \times \mathbb{R}^+$, 且当 τ 与 $\tau = 0, \tau = 1$, 映射 $\tau \mapsto \tau - J \pmod{1}$ 的奇点的距离至少是 $O(J^{-1})$ 时, 回归映射 F 具有如下表达式:

$$F(\tau, J) = F_0(\tau, J) + F_1(\tau, J) + F_2(\tau, J),$$

图 4-5 区域 K 与 f 的轨道.

其中

$$\begin{aligned}
 F_0(\tau, J) &= (\bar{\tau}, \bar{J}), \quad \bar{\tau} = \tau - J(\bmod 1), \quad \bar{J} = J + \Delta(\bar{\tau} - \frac{1}{2}), \\
 F_1(\tau, J) &= J^{-1}(0, \Delta_1((\bar{\tau} - 1/2)^2 - 1/12)), \quad F_2(\tau, J) = O(J^{-2}), \\
 \Delta &= R(0)(\dot{R}(0^+) - \dot{R}(0^-)) \int_0^1 \frac{1}{R^2(s)} ds, \\
 \Delta_1 &= \frac{1}{2} R^3(0)(\ddot{R}(0^+) - \ddot{R}(0^-)) \left(\int_0^1 \frac{1}{R^2(s)} ds \right)^2.
 \end{aligned}$$

尽管系统 (4-36) 不同于经典的 Fermi-Ulam 模型 [24], 但忽略高阶项后, 定理 4.5.1 中的映射 F 与文献 [24, Theorem 1] 中的映射是一致的. 由于 F_0 满足

$$F_0(\tau, J+1) = F_0(\tau, J) + (0, 1),$$

映射 F 的主要项 F_0 可看做是环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上的一个线性映射. 当 $|\text{Tr}(dF_0)| = |2 - \Delta| < 2$, 映射 F_0 是椭圆的; 当 $|2 - \Delta| > 2$, 映射 F_0 是双曲的. 注意到, 当 $\Delta \in (2, 4)$ 时, F_0 有一条加速周期轨道:

$$F_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta}, N\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta}, N+1\right),$$

其中 $N > 0$ 为一个整数. 故如果某些非共振条件满足时, F_0 的不动点 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta}, N)$ 可保持稳定, 那么这个不动点将会是原系统 (4-36) 的一条逃逸轨道.

首先来看映射 $F_0(\tau, J)$ 在 F 中是如何出现的. 考虑映射 $u: S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+$,

u 由以下方程定义:

$$u(\xi, J) = (\xi + \frac{1}{J} \pmod{1}, J).$$

以下引理的证明可见 [24, Proposition 2.1].

引理 4.5.1. 令由 $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ 与其在 u 下的像所围的区域为

$$U = \{(\xi, J) : 0 \leq \xi < \frac{1}{J}\}.$$

令 $\tau = \xi J$. 则区域 U 在映射 u 下的首次回归映射为

$$G(\tau, J) = (\tau - J \pmod{1}, J).$$

引理 4.5.1 的首次回归映射 G 与定理 4.5.1 中的 F_0 十分相似, 映射 F_0 中的 $\Delta(\bar{\tau} - 1/2)$ 即是 $R(t)$ 导数跳跃的影响. 因此, 首先需要这样的坐标, 使得当远离奇点时, 映射 f 在此坐标下为可积映射 u 的一个小扰动. 在给出这样的坐标之前, 先在这里给出当 v 充分大时, $\delta(t, v)$ 以及 $f(t, v)$ 的展开式, 这对于接下来的计算是重要的.

令 $\delta_0(t, v) \equiv 0$. 对于 $n \geq 1$, $\delta_n(t, v)$ 由以下的递推式所定义:

$$\delta_n(t, v) = \frac{1}{2} \left(T(t, v) + T(t + \delta_{n-1}(t, v), \sqrt{v^2 + \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{R^2(t + \delta_{n-1}(t, v))}}) \right).$$

根据函数 T 的定义 (见公式 (4-37)) 以及归纳法, 可说明:

$$|\delta_n(t, v) - \delta_{n-1}(t, v)| = O(v^{-n}),$$

故有 $\delta_n \rightarrow \delta$. 因此可通过递推的方式获得 $\delta(t, v)$ 的展开式. 为避免大量的运算, 可使用软件, 如 *Mathematica* 来完成 $\delta(t, v)$ 的展开式计算. 通过计算得到:

$$\delta(t, v) = \frac{2R}{v} + \frac{2R\dot{R}}{v^2} + \frac{2(-1 + R^2\dot{R}^2 + R^3\ddot{R})}{v^3R} + O(v^{-4}). \quad (4-40)$$

有了 $\delta(t, v)$ 的表达式, 当 v 充分大时, 根据 (4-38) 可得到:

$$\begin{aligned} t' &= t + \frac{2R}{v} + \frac{2R\dot{R}}{v^2} + \frac{2(-1 + R^2\dot{R}^2 + R^3\ddot{R})}{v^3R} + O(v^{-4}), \\ v' &= v - 2\dot{R} - \frac{4R\ddot{R}}{v} + \frac{2\dot{R} - 4R^2(R\dot{R}\ddot{R} + R^2\ddot{R})}{R^2v^2} + O(v^{-3}). \end{aligned} \quad (4-41)$$

当映射 f 的轨道不穿过 $t = 0$ 时, 以下引理确保了存在一组坐标使得 f 为可积映射 u 的一个小扰动.

引理 4.5.2. 区域 K 如之前所定义. 当 $(t, v) \notin f^{-1}(K)$ 时, 存在坐标变换 $h : (t, v) \mapsto (\xi, J)$ 使得

$$u = h \circ f \circ h^{-1} + (O(v^{-4}), O(v^{-3})), \quad (4-42)$$

其中 $u(\xi, J) = (\xi + 1/J, J)$.

证明: 令

$$A = \int_0^1 \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau, \quad \xi(t) = \frac{\int_0^t \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau}{A}, \quad I(t, v) = \frac{A}{\int_t^{t'} \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau}. \quad (4-43)$$

由 ξ 的定义, 可以得到:

$$\xi(t') = \frac{\int_0^{t'} \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau}{A} = \frac{\int_0^t \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau}{A} + \frac{\int_t^{t'} \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau}{A} = \xi(t) + (I(t, v))^{-1}. \quad (4-44)$$

下面利用 f 的展开式给出一个显式的变换.

由式 (4-40), 计算可得

$$\begin{aligned} I &= A \left(\int_t^{t'} \frac{1}{R^2(\tau)} d\tau \right)^{-1} = A \left(\frac{1}{R^2} (t' - t) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{R^2} \right) \times (t' - t)^2 + O((t' - t)^3) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} ARv + \frac{1}{2} AR\dot{R} + \frac{3A + R^3\ddot{R}}{6Rv} + O(v^{-2}). \end{aligned}$$

令

$$J := \frac{1}{2} ARv + \frac{1}{2} AR\dot{R} + \frac{3A + R^3\ddot{R}}{6Rv}. \quad (4-45)$$

由式 (4-43) 以及 (4-45), 变换

$$h : (t, v) \mapsto (\xi, J)$$

已定义好了. 由 ξ 的定义, $\xi(t + i) = \xi(t) + i$, 且 $d\xi(t)/dt > 0$, 故 ξ 可作为圆周 S^1 的一个新变量. 现在只需证明估计 (4-42) 的成立. 令

$$(r_1, r_2) = g - h \circ f \circ h^{-1} = (\xi(t) - \xi(t') + J(t, v)^{-1}, J(t, v) - J(t', v')).$$

根据 J 的定义以及 (4-44), 可得到

$$\xi(t) - \xi(t') + J(t, v)^{-1} = \frac{1}{J} - \frac{1}{I} = \frac{1}{J} - \frac{1}{J + O(v^{-2})} = O(v^{-4}).$$

关于 r_1 的估计已证. 关于 r_2 的估计, 可将式子 (4-41) 代入到 (4-45) 中, 并计算

$$r_2 = J(t, v) - J(t', v').$$

经过符号计算, 可得到

$$r_2 = \frac{A}{3v^3}(6R\dot{R}^4 - 3\ddot{R} + 36R^2\dot{R}^2\ddot{R} + 9R^3\ddot{R}^2 + 17R^3\dot{R}\ddot{R}) + O(v^{-4}) = O(v^{-3}).$$

证毕. □

下面的引理反映了扰动对引理 4.5.1 的影响.

引理 4.5.3. 映射 $\bar{u} : S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+$ 定义为

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + \frac{1}{J} + O(J^{-4}), \\ J' &= J + O(J^{-3}).\end{aligned}$$

令 $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ 与 $\bar{u}(\{0\} \times \mathbb{R}^+)$ 所围区域为 M . 则存在坐标 (τ, J) 使得 M 在此坐标下为 $[0, 1) \times \mathbb{R}^+$. 并且, 如果 τ 与 $\tau = 0, \tau = 1$, 以及映射 $\tau \mapsto \tau - J \pmod{1}$ 的奇点的距离至少为 $O(J^{-1})$, 则 $(\xi, J) \in M$ 回到 M 的迭代次数为 $[J] + 1$ 或者 $[J]$, 区域 M 的首次回归映射具有以下形式:

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau - J \pmod{1} + O(J^{-2}) = \tau - J + O(J^{-2}) \pmod{1}, \\ J' &= J + O(J^{-2}),\end{aligned}\tag{4-46}$$

其中 $[J]$ 为 J 的整数部分.

证明: 直线 $\{(0, J)\}$ 在 $\bar{u}$ 下的像为 $\{(\frac{1}{J} + O(J^{-4}), J + O(J^{-3}))\}$, 其可以参数化: $\{(\frac{1}{J} + O(J^{-3}), J)\}$. 令 $P(J, \xi) = \frac{1}{J} + O(J^{-3})$, 则有

$$M = \{(\xi, J) : 0 \leq \xi < P(J, \xi)\}.$$

设

$$\tau = \frac{\xi}{P(J, \xi)} = \xi J + O(J^{-4}).$$

由以上的定义, 在坐标 (τ, J) 下 $M = [0, 1) \times \mathbb{R}^+$. 取 $(\xi, J) \in M$, 经过 $[J]$ 次迭代后, (ξ, J) 的状态为

$$(\xi + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}), J + O(J^{-2})).$$

由于 τ 与 $\tau = 0$ 及 $\tau = 1$ 的距离至少为 $O(J^{-1})$, 那么 ξ 与 $\xi = 0$ 及 $\xi = \frac{1}{J}$ 的距离至少是 $O(J^{-2})$. 故存在常数 δ_1, δ_2 使得

$$\frac{\delta_1}{J^2} \leq \xi \leq \frac{1}{J} - \frac{\delta_2}{J^2},$$

即

$$\frac{[J]}{J} < \frac{\delta_1}{J^2} + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) \leq \xi + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) \leq \frac{1}{J} - \frac{\delta_2}{J^2} + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) < \frac{[J] + 1}{J}.$$

由上式, 当 J 充分大时有:

$$\frac{[J]}{J} < \xi + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) < \frac{[J] + 1}{J}.$$

以下需要考虑两种可能性:

$$(i) : \frac{[J]}{J} < \xi + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) < 1; \quad (4-47)$$

$$(ii) : 1 \leq \xi + \frac{[J]}{J} + O(J^{-3}) < \frac{[J] + 1}{J}. \quad (4-48)$$

情形 (i) 说明 (ξ, J) 需要 $[J] + 1$ 次迭代才能返回 M , 而情形 (ii) 需要 $[J]$ 次迭代. 现在只需要证明 τ' 的形式即可. 在情况 (i) 下, (ξ, J) 初次返回到 M 的状态为

$$(\xi + \frac{[J] + 1}{J} - 1 + O(J^{-3}), J + O(J^{-2})),$$

其在坐标 (τ, J) 下即是

$$(\tau + [J] + 1 - J + O(J^{-2}), J + O(J^{-2})).$$

由 (4-47), $[J] \neq J$ 且 $\tau + [J]$ 在 $[J]$ 与 J 之间. 由于 τ 与 $\tau = 0$ 及映射 $\tau \mapsto \tau - J \pmod{1}$

1) 的奇点的距离至少为 $O(J^{-1})$, $\tau + [J]$ 与 $[J]$, J 的距离也至少是 $O(J^{-1})$. 由 (4-47) 以及 τ 的定义, 可得到

$$0 \leq [J] - J + 1 < \tau + [J] + 1 - J + O(J^{-2}) < 1, \quad (4-49)$$

见图 4-6. 上式意味着在情形 (4-47) 下 (4-46) 成立. 在情形 (4-48) 下证明 (4-46) 是类

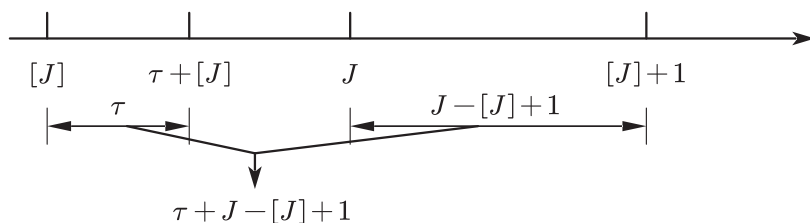


图 4-6 不等式 (4-49) 的直观解释.

似的. □

在进入定理 4.5.1 的细节性证明之前, 先来叙述证明的主要思路. 证明所用到的主要变换为:

$$(t, v) \mapsto (\xi, J) \mapsto (\tau, J), \quad (4-50)$$

其中第一个映射将 $S^1 \times \mathbb{R}^+$ 映射到 $S^1 \times \mathbb{R}^+$ (见引理 4.5.2), 第二个映射将 K 映成 $[0, 1) \times \mathbb{R}^+$ (见引理 4.5.3). 令 $(t, v) \in K$, (t_1, v_1) 为轨道进入区域 K 之前的状态, $f(t_1, v_1) = (t_2, v_2)$, 这些记号的意义可参见图 4-5. 由于轨道从 (t, v) 到达 (t_1, v_1) 都不穿过映射 f 的奇异线 $t = 0$, 可用引理 4.5.2 中的坐标 (ξ, J) 来描述这一段轨道, 其中 f 在这段轨道的形式为

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \frac{1}{J} + O(J^{-4}), \\ J' &= J + O(J^{-3}). \end{aligned} \quad (4-51)$$

由引理 4.5.3, 如果在整个区域 $S^1 \times \mathbb{R}^+$ f 都具有如上的表达式, 则回归到 K 的迭代次数为 $[J] + 1$ 或者 $[J]$. 因此, (t, v) 到达 (t_1, v_1) 的迭代次数应为 $[J]$ 或者 $[J] - 1$. 利用 (4-51), $J(t, v)$ 与 $J(t_1, v_1)$ 的距离应为 $O(v^{-2})$. 当轨道穿过奇异线 $t = 1$ 时, 映射 f 在 (4-51) 的形式不能应用到此情况, 此时应当返回到 f 的原始定义. 由于 t_1, t_2 分别位于 $t = 0 \pmod{1}$ 的两边, 我们可以在 $t = 0$ 的两边展开如下表达式

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2}(T(t_1, v_1) + T(t_2, \sqrt{v_1 + \frac{1}{R^2(t_1)} - \frac{1}{R^2(t_2)}})), \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{1}{R^2(t_1)} - \frac{1}{R^2(t_2)}},$$

再将这些表达式代入到 (4-50) 去估计 $J(t_1, v_1)$ 与 $J(t_2, v_2)$ 的距离. 因此 $J(t, v)$ 与 $J(t_2, v_2)$ 的距离也将得到. 利用引理 4.5.3, $\tau(t, v)$ 与 $\tau(t_2, v_2)$ 的距离也可以得到. 最终地, 可以得到定理 4.5.1 中映射 F 的形式.

定理 4.5.1 的证明: 令 $(t, v) \in K$, (t_1, v_1) 为轨道进入 K 的最后一个状态. 令

$$f(t_1, v_1) = (t_2, v_2), \quad J(t, v) = J, \quad J(t_1, v_1) = J_1, \quad J(t_2, v_2) = J_2.$$

由定理证明前的分析, (t, v) 到达 (t_1, v_1) 的迭代次数为 $[J]$ 或者 $[J] - 1$. 因此, 根据引理 4.5.2 以及 J 的定义 (4-45) 可得到

$$J(t, v) - J(t_1, v_1) = O(v^{-2}).$$

现在来处理 $J(t_1, v_1)$ 与 $J(t_2, v_2)$ 的距离. 首先由映射 f 的展开式以及 K 的定义, 有以下量阶的估算:

$$t \sim O(v^{-1}) \sim J(t, v)^{-1} \sim J(t_1, v_1)^{-1} \sim v_1^{-1} \sim v_2^{-1} \sim t_1 \sim t_2.$$

为记号简便, 令

$$R_0 = R(0), \quad \dot{R}^\pm = \dot{R}(0^\pm), \quad \ddot{R}^\pm = \ddot{R}(0^\pm).$$

由 f 以及 δ 的定义, 有

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2}(T(t_1, v_1) + T(t_2, \sqrt{v_1 + \frac{1}{R^2(t_1)} - \frac{1}{R^2(t_2)}})), \quad (4-52)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1 + \frac{1}{R^2(t_1)} - \frac{1}{R^2(t_2)}} - 2\dot{R}(t_2). \quad (4-53)$$

由于 t_1, t_2 分别位于 $t = 0 \pmod{1}$ 的两侧, 且 $t_1 \sim t_2 \sim O(v^{-1})$, 故有

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t_2) &= \ddot{R}^+ + O(v_2^{-1}), \quad \ddot{R}(t_1) = \ddot{R}^- + O(v_2^{-1}), \\ \dot{R}(t_2) &= \dot{R}^+ + \ddot{R}^+ t_2 + O(v_2^{-2}), \quad \dot{R}(t_1) = \dot{R}^- + \ddot{R}^- t_1 + O(v_2^{-2}), \\ R(t_2) &= R_0 + \dot{R}^+ t_2 + \frac{1}{2} \ddot{R}^+ t_2 + O(v_2^{-3}), \quad R(t_1) = R_0 + \dot{R}^- t_1 + \frac{1}{2} \ddot{R}^- t_1 + O(v_2^{-3}). \end{aligned} \quad (4-54)$$

利用以上展开式以及 (4-53) 可得到

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + 2\dot{R}^+ + O(v_2^{-1}), \\ v_2 &= v_1 - 2\dot{R}^+ + O(v_1^{-1}). \end{aligned} \quad (4-55)$$

利用 (4-54), 在 $t = 0$ 的两边展开 (4-52) 可得到

$$t_1 = t_2 - \frac{2R_0}{v_1} - \frac{\dot{R}^+ + \dot{R}^-}{v_1} t_2 + \frac{2R_0 \dot{R}^-}{v_1^2} + O(v_1^{-3}). \quad (4-56)$$

由 J 的定义 (4-45), 计算得到

$$\begin{aligned} J(t_2, v_2) - J(t_1, v_1) &= \frac{1}{2}AR(t_2)v_2 + \frac{1}{2}AR(t_2)\dot{R}(t_2) + \frac{3A + AR^3(t_2)\ddot{R}(t_2)}{6R(t_2)v_2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}AR(t_1)v_1 + \frac{1}{2}AR(t_1)\dot{R}(t_1) + \frac{3A + AR^3(t_1)\ddot{R}(t_1)}{6R(t_1)v_1} \right) \\ &= \frac{1}{2}A(\dot{R}^+ - \dot{R}^-)(t_2v_2(1 + \frac{\dot{R}^+}{v_2}) - R_0) + \frac{1}{4}A\frac{\ddot{R}^+ - \ddot{R}^-}{v_2}((t_2v_2 - R_0)^2 - \frac{1}{3}R_0^2) + O(v_2^{-2}), \end{aligned} \quad (4-57)$$

上述运算用到了式 (4-56), (4-55), (4-54).

令 $\xi_2 = \xi(t_2)$. 由 ξ 的定义, 可得到 t_2 的表达式:

$$t_2 = AR_0^2\xi_2 + A^2R_0^3\dot{R}^+\xi_2^2 + O(v_1^{-3}). \quad (4-58)$$

类似地, 利用式子 (4-58) 与

$$J_2 = J(t_2, v_2) = \frac{1}{2}AR(t_2)v_2 + \frac{1}{2}AR(t_2)\dot{R}(t_2) + \frac{3A + AR^3(t_2)\ddot{R}(t_2)}{6R(t_2)v_2},$$

计算得到

$$v_2(\xi_2, J_2) = \frac{2}{AR_0}J_2 - 2\dot{R}^+\xi_2J_2 - \dot{R}^+ - AR_0^2\ddot{R}^+\xi_2 - \frac{A(3 + R_0^3\ddot{R}^+)}{6R_0J_2} + O(J_2^{-2}).$$

如引理 4.5.3 中一样, 定义 $\tau = P(J, \xi)/\xi = J\xi + O(J^{-4})$ 使得 $K = [0, 1) \times \mathbb{R}^+$. 现在坐标 (τ, J) 定义好了. 令 $\tau_2 = P(J_2, \xi_2)/\xi_2$. 将 t_2, v_2 的表达式代入式子 (4-57) 得到

$$J_2 - J_1 = AR_0(\dot{R}^+ - \dot{R}^-)(\tau_2 - \frac{1}{2}) + \frac{A^2R_0^3(\ddot{R}^+ - \ddot{R}^-)}{2J_2}((\tau_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}) + O(J_2^{-2}).$$

由 $J - J_1 = O(J^{-2})$, $J_2 - J_1 = O(1)$, 有 $J_2^{-1} = J^{-1} + O(J^{-2})$. 最终地得到了 $F(\tau, J)$ 第一项的表达式:

$$J_2 = J + AR_0(\dot{R}^+ - \dot{R}^-)(\tau_2 - \frac{1}{2}) + \frac{A^2 R_0^3(\ddot{R}^+ - \ddot{R}^-)}{2J}((\tau_2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{12}) + O(J^{-2}). \quad (4-59)$$

注意到, 在 (t, v) 到达 (t_2, v_2) 之前, f 与引理 4.5.3 中的 $\bar{u}$ 具有相同的表达式. 故根据引理 4.5.3 有

$$\tau_1 = \tau(t_1, v_1) = \tau - J - 1 + O(J^{-2}). \quad (4-60)$$

由 ξ 与 J 的定义 (见 (4-43), (4-45)), 我们有

$$\begin{aligned} \tau_1 &= P(J_1, \xi_1)/\xi_1 = J_1\xi_1 + O(J^{-4}) = \frac{v_1 + \dot{R}^-}{2t_1} + O(J^{-2}), \\ \tau_2 &= P(J_2, \xi_2)/\xi_2 = J_2\xi_2 + O(J^{-4}) = \frac{v_2 + \dot{R}^+}{2t_2} + O(J^{-2}), \end{aligned} \quad (4-61)$$

式 (4-61) 与 (4-56) 意味着

$$J_2\xi_2 = J_1\xi_1 + 1 + O(J^{-2}).$$

最终, 由上式以及 (4-60) 得到

$$\tau_2 = \tau - J + O(J^{-2})(\text{mod } 1),$$

证毕. □

4.6 逃逸轨道的存在性

以下命题确保了映射 F_0 的加速周期轨道在扰动下的稳定性, 证明可参见 [29] 或 [30, Lemma 2.7].

命题 4.6.1. 假设映射 F_0 是椭圆型的, 其存在一条加速周期轨道: 即存在 $p \in \mathbb{R}^2$ 使得 $F_0^l(p) = p + (0, m)$ ($l, m > 0$ 为整数); 且 dF_0^l 的特征值不等于 $e^{\pm i2\pi k}$, $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; F 保持测度 $(1 + \frac{W(\tau)}{J} + O(J^{-2}))d\tau \wedge dJ$, 其中 W 是一个仿射函数. 则映射 F 存在逃逸轨道.

引理 4.6.1. F 保持测度 $1 + O(J^{-2})d\tau \wedge dJ$.

证明: 以下事实常常在文献里不加证明地给出: 映射 f 保持测度

$$(v + \dot{R})dt \wedge dv.$$

这里给出上述事实的一个简短证明. 令 γ_1 为 $\{(r, v, t) : r = R(t), v < -L\}$ 中的一个闭圈, γ_2 为 γ_1 在方程 (4-36) 的流下到达 $r = R(t)$ 的像. 令 $\mathcal{P}(v, r, t) = (-v + 2\dot{R}(t), r, t)$ 为碰撞映射, $\mathcal{P}(\gamma_2) = \gamma_3$. 注意到 $f(\gamma_1) = \gamma_3$. 令 $H(v, r) = v^2/2 + 1/2r^2$. 由于 1-形式 $vdr - H(v, r)dt$ 为 Poincaré-Cartan 积分不变量 (见本文中的定义 2.2.1), 有

$$\int_{\gamma_1} vdr - H(v, r)dt = \int_{\gamma_2} vdr - H(v, r)dt.$$

由

$$\int_{\mathcal{P}^{-1}(\gamma_3)} vdr - H(v, r)dt = \int_{\gamma_3} (\mathcal{P}^{-1})^*(vdr - H(v, r)dt),$$

其中 $*$ 为微分形式的拉回映射, 可以得到

$$\int_{\gamma_1} vdr - H(v, r)dt = \int_{f(\gamma_1)} (-v + 2\dot{R})dr - H(-v + 2\dot{R}, r)dt.$$

代入 $r = R(t)$ 并利用 Green 公式得到

$$\int_{D_1} (-v + \dot{R})dt \wedge dv = \int_{f(D_1)} (-v + \dot{R})dt \wedge dv, \quad (4-62)$$

其中 D_1 为 γ_1 所围的区域. 回顾 v 的绝对值作为 f 的变量之一. 由于 $v < 0$, 在 (4-62) 中将 v 替换为 $-v$ 得到

$$\int_{D_1} (v + \dot{R})dt \wedge dv = \int_{f(D_1)} (v + \dot{R})dt \wedge dv.$$

由于 γ_1 是任意的, 区域 D_1 也是任意的, 故 f 保持测度 $(v + \dot{R})dt \wedge dv$.

回顾 ξ 与 J 的定义:

$$\begin{aligned} \xi(t, v) &= \frac{1}{A} \int_0^s \frac{1}{R^2(x)} dx, \\ J(t, v) &= \frac{1}{2}AR(t)v + \frac{1}{2}AR(t)\dot{R}(t) + \frac{3A + AR^3(t)\ddot{R}(t)}{6R(t)v}. \end{aligned}$$

由 $\tau = \xi J + O(J^{-4})$, 通过计算可得到

$$d\tau \wedge dJ = (J + O(J^{-5}))d\xi \wedge dJ = \left(\frac{A}{4}(v + \dot{R}) + O(v^{-1})\right)dt \wedge dv. \quad (4-63)$$

在式子 (4-63) 两边同时乘以 $(v + \dot{R})/(\frac{A}{4}(v + \dot{R}) + O(v^{-1}))$, 得到

$$(v + \dot{R})dt \wedge dv = \frac{4}{A}(1 + O(J^{-2}))d\tau \wedge dJ,$$

其中用到了 $O(v^{-2}) \sim O(J^{-2})$. 因为 $4/A$ 是一个常数, 故 F 保持测度

$$(1 + O(J^{-2}))d\tau \wedge dJ.$$

□

定理 4.2.2 的证明: 令 $p = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta}, N)$, 其中 N 为一个充分大的正整数. 注意到 $F_0(p) = p + (0, 1)$ 且 dF_0 的特征值为

$$\frac{1}{2}(2 - d \pm i\sqrt{\Delta(4 - \Delta)}).$$

当 $\Delta \in (2, 4) \setminus \{3\}$ 时, F_0 是椭圆型的且 dF_0 的特征值不等于 $e^{\pm i2\pi k}$, $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 令 $W(\tau) \equiv 0$. 由引理 4.6.1, F 满足命题 4.6.1 的条件. 定理 4.2.2 得证. □

4.7 数值结果

根据 F 的表达式, 映射 f 整体的性态应该取决于 Δ 的大小. 本节用数值计算验证这一事实.

首先考虑光滑情况. 令

$$R(t) = 1 + 0.5 \sin(2\pi t). \quad (4-64)$$

映射 f 的相图如图 4-7 所示, 图中的颜色用以区分不同的初值. 与定理 4.2.1 的结果相吻合, 图 4-7 存在大量的不变曲线.

为了观察到当 $R(t)$ 分段光滑时, f 动力学的椭圆性与双曲性, 以下取不同的 $R(t)$

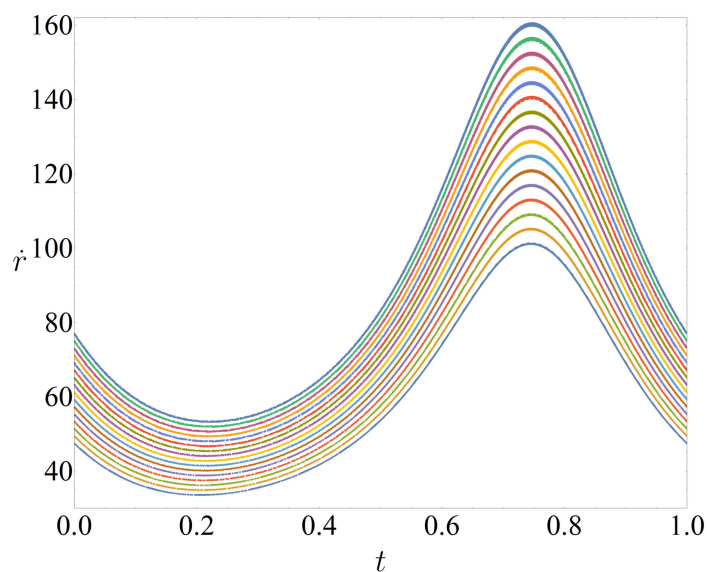


图 4-7 当 $R(t) = 1 + 0.5 \sin(2\pi t)$ 时映射 f 的相图.

使得 $|\Delta - 2| < 2$ 或者 $|\Delta - 2| > 2$. 令

$$R(t) = 1 + 0.65|\sin(\pi t)|. \quad (4-65)$$

由式 (4-4) 中 Δ 的定义, 计算得到此时 $\Delta \simeq 2.18762$, 即映射 F 的主要项 F_0 是椭圆型的. 图 4-8 展示了相空间中大量存在的 KAM 岛屿. 此时相空间中已不存在同伦非平凡的不变曲线, 但在椭圆周期轨道附近仍然存在有大量的 KAM 岛屿.

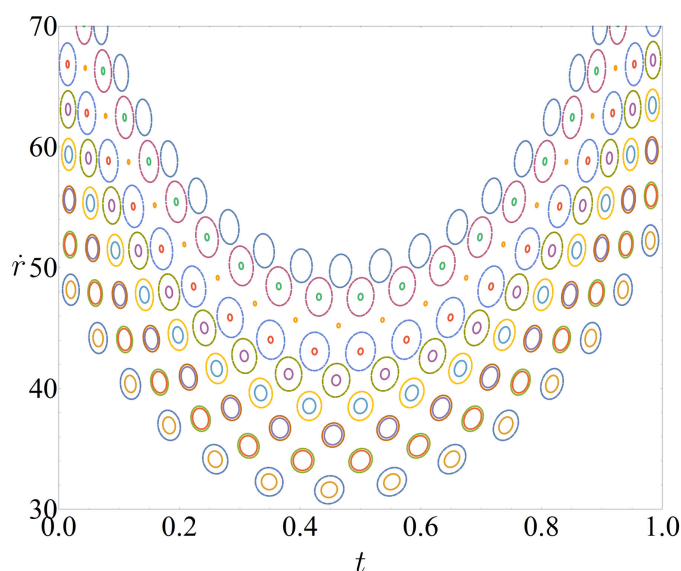


图 4-8 当 $R(t) = 1 + 0.65|\sin(\pi t)|$ 时映射 f 的相图.

取

$$R(t) = 1 - 0.2|\sin(\pi t)|. \quad (4-66)$$

此时 $\Delta \simeq -1.67391$, 映射 F_0 是双曲型的. 图 4-9 中展示了映射 f 轨道的混合性态.

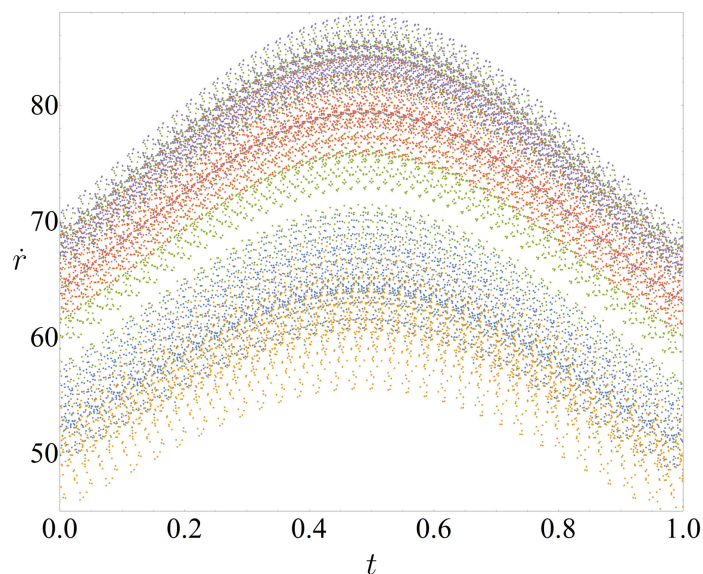


图 4-9 当 $R(t) = 1 - 0.2|\sin(\pi t)|$ 时映射 f 的相图.

当 $R(t)$ 满足 (4-65) 时, 根据定理 4.2.2 以及 $\Delta \simeq 2.18762$, 系统 (4-36) 存在有无界轨道. 图 4-10 展示了一条不断获得能量的轨道.

以上数值结果均与理论预期相吻合. 特别地, 如何利用 KAM 理论解释 $|\Delta - 2| < 2$ 时出现的大量椭圆周期轨道附近的不变曲线是值得继续深入探讨的课题.

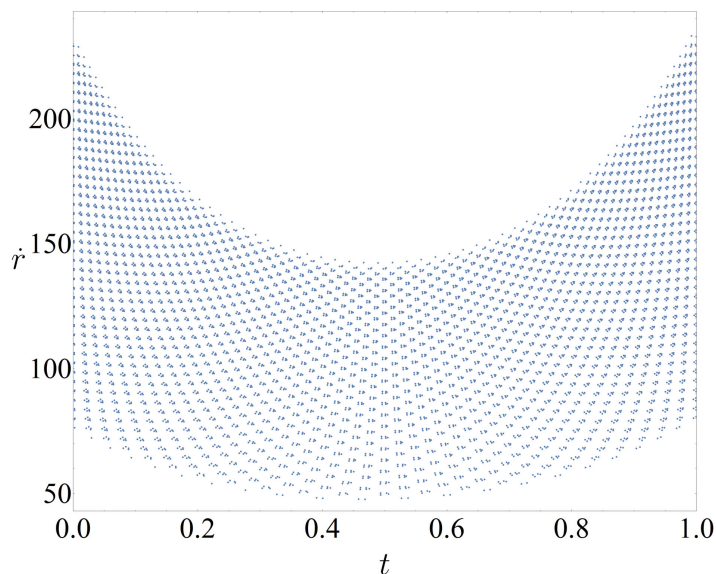


图 4-10 当 $R(t) = 1 + 0.65|\sin(\pi t)|$ 时 f 的一条逃逸轨道.

4.8 本章小结

本章研究了两自由度系统: 呼吸圆台球. 当系统具有 C^7 类的光滑性时, 利用角动量约化, “停止墙壁” 变换, 作用量-角变量变换, 尺度化变换以及时间与广义坐标的交换变换将系统无穷远处的动力学约化为一个小扭转映射, 运用 Moser 小扭转定理说明了无穷远处不变环面的存在性及系统所有解的有界性. 为探究系统的光滑性对环面存在性的影响, 当系统分段光滑时, 本章详细地给出了奇点附近范式映射的计算过程; 利用非共振条件保证了此范式映射主项的加速周期轨道的稳定性, 从而保证了系统无界轨道的存在性, 即光滑性丧失时无穷远的不变环面会发生破裂.

第五章 呼吸圆台球的 Aubry-Mather 集

本章在半径函数为 C^1 的周期函数的条件下, 用小扭转情形下的 Aubry-Mather 理论研究呼吸圆台球. 本章得到的生成函数仅是 C^1 的, 这是 Aubry-Mather 理论所要求的最低阶的光滑条件^[8]. 本章证明了系统 Aubry-Mather 集的存在性, 其包括广义的拟周期解与次谐周期轨道.

5.1 边值问题, 变分问题与生成函数

仍考虑角动量约化后的呼吸圆台球:

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3}, \quad (5-1)$$

其中 $c = r^2\dot{\theta}$ (设 $c > 0$), 有一刚性墙壁 $r = R(t)$ (R 为 1-周期的 C^1 类函数且 $R(t) > 0$). 考虑边值问题:

$$\begin{cases} \ddot{r} = c^2/r^3, & t \in (t_0, t_1), \\ r(t) < R(t), & t \in (t_0, t_1), \\ r(t_0) = R(t_0), r(t_1) = R(t_1), \\ \dot{r}(t_0^+) < -\frac{R(t_0)}{t_1 - t_0}, \dot{r}(t_1^-) > \frac{R(t_1)}{t_1 - t_0}. \end{cases} \quad (5-2)$$

其中 $t_0 < t_1$. Bonanno 与 Marò^[12] 证明了当 R 是 C^2 类的周期函数时且 $t_1 - t_0$ 充分小时, 上述边值问题存在唯一解. 实际上, 我们将在下面说明, 只需要 $R(t)$ 为 C^1 类函数即可保证上述结论.

先假定存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < t_1 - t_0 \leq \delta$ 时, 上述边值问题存在唯一解 $r(t; t_0, t_1)$. 在区域 $\{(t_0, t_1) : 0 < t_1 - t_0 \leq \delta\}$ 上定义生成函数

$$h(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(r(t; t_0, t_1), \dot{r}(t; t_0, t_1)) dt,$$

其中 L 为系统 (5-1) 的 Lagrange 函数:

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2}.$$

在本章后文内容可看到, 如果 R 是 C^1 的, $r(t; t_0, t_1), h(t_0, t_1)$ 也是 C^1 的, 且 h 的混合

偏导数存在且连续. 根据定义, 这里的生成函数即是离散问题的作用量. 利用边值条件

$$r(t_0; t_0, t_1) = R(t_0), \quad r(t_1; t_0, t_1) = R(t_1)$$

以及在区间 $t \in (t_0, t_1)$ 上, $r(t; t_0, t_1)$ 满足 Euler-Lagrange 方程, 可直接计算得到

$$\begin{aligned} h_1(t_0, t_1) &= \frac{1}{2} \dot{r}^2(t_0^+) + \frac{c^2}{2R^2(t_0)} - \dot{r}(t_0^+) \dot{R}(t_0), \\ h_2(t_0, t_1) &= -\frac{1}{2} \dot{r}^2(t_1^-) - \frac{c^2}{2R^2(t_1)} + \dot{r}(t_1^-) \dot{R}(t_1). \end{aligned} \quad (5-3)$$

考虑时间序列 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 假设对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $0 < t_{n+1} - t_n \leq \delta$, 且有

$$h_2(t_{n-1}, t_n) + h_1(t_n, t_{n+1}) = 0.$$

根据式 (5-3), 这意味着

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}^2(t_n^+) - \dot{r}(t_n^+) \dot{R}(t_n) &= \frac{1}{2} \dot{r}^2(t_n^-) - \dot{r}(t_n^-) \dot{R}(t_n) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \dot{r}^2(t_n^+) - \dot{r}(t_n^+) \dot{R}(t_n) + \frac{1}{2} \dot{R}^2(t_n) &= \frac{1}{2} \dot{r}^2(t_n^-) - \dot{r}(t_n^-) \dot{R}(t_n) + \frac{1}{2} \dot{R}^2(t_n) \\ \Leftrightarrow (\dot{r}(t_n^+) - \dot{R}(t_n))^2 &= (\dot{r}(t_n^-) - \dot{R}(t_n))^2 \\ \Leftrightarrow \dot{r}(t_n^+) &= -\dot{r}(t_n^-) + 2\dot{R}(t_n). \end{aligned}$$

由边值问题 (5-2) 中的最后一个条件, 在上式的最后一步舍弃掉了 $\dot{r}(t_n^+) = \dot{r}(t_n^-)$ 这个解. 通过上述论证, 在每个时间间隔 (t_n, t_{n+1}) , 存在唯一解 $r(t; t_n, t_{n+1})$, 且在 t_n^+ 与 t_n^- , 这些解满足碰撞规则. 故时间序列 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 为系统 (5-1) 一个真实解在每次碰撞时的时间序列.

定义 5.1.1. 系统 (5-1) 的变分问题的解即是序列 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 使得对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有

$$0 < t_{n+1} - t_n \leq \delta, \quad h_2(t_{n-1}, t_n) + h_1(t_n, t_{n+1}) = 0.$$

下面叙述本章的主要结果:

定理 5.1.1. 设系统 (5-1) 的墙壁运动函数 $R(t)$ 为 C^1 类的 1-周期函数 ($R(t) > 0$), 则存在常数 $\eta > 0$, 当 $\alpha \in (0, \eta)$ 时系统 (5-1) 的变分问题存在解 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i/i = \alpha$. 并且如果 $\alpha = p/q$ 为有理数 (p, q 互素), 则对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$t_{n+q} = t_n + p$; 如果 α 为无理数, 那么集合 $\{t_n : n \in \mathbb{Z}\}/\mathbb{Z}$ 的闭包可能为整个圆周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 也可能为圆周上的 *Cantor* 集.

注 5.1.1. 变分问题与其相应的生成函数实际上对应于一个扭转映射. 具体对应关系可参考文献 [12]. 此扭转映射即是第四章讨论呼吸圆台球无界轨道的存在性时的碰撞映射 f , 不过此扭转映射以 (t, K) 作为新的变量, 其中

$$K = \frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{2R^2(t)} - v\dot{R}(t),$$

v 为碰撞后的瞬时速度的绝对值. 可以看出, 当 v 充分大, 映射 $(t, v) \mapsto (t, K)$ 为一个同胚. 故当 v 充分大, 碰撞映射 f 可等价地使用坐标 (t, K) . 变分问题的解则是扭转映射的一条轨道在时间变量上的投影. 因此, 定理 5.1.1 中以有理数作为旋转数的序列对应扭转映射的一条次谐周期轨道; 以无理数为旋转数的序列对应的扭转映射的轨道, 在文献中被称为广义拟周期解.

在本节最后, 考虑边值问题 (5-2) 解的存在唯一性. 与文献 [12] 有所不同的是, 在证明中用到的凸性条件仅要求 $R(t)$ 可微, 这使得系统的光滑性条件可降低一阶.

命题 5.1.1. 假设 $R(t)$ 是 C^r 函数 ($r \geq 1$), 则存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < t_1 - t_0 \leq \delta$ 时, 边值问题 (5-2) 存在唯一的 C^r 解 $r(t; t_0, t_1)$.

证明: 系统 (5-1) 的通解为

$$r(t) = \sqrt{\frac{c^2 + A^2(t+B)^2}{A}},$$

其中 $A/2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}$ 为能量, B 为常数. 注意到有

$$\dot{r}(t) = \frac{A(t+B)}{r(t)}.$$

利用边值条件

$$r(t_0) = R(t_0), r(t_1) = R(t_1)$$

可解出

$$A_{\pm} = \frac{R(t_0) + R(t_1) \pm 2\sqrt{R^2(t_0)R^2(t_1) - c^2(t_1 - t_0)^2}}{(t_1 - t_0)^2},$$

$$B_{\pm} = \frac{R^2(t_1) - R^2(t_0)}{2A_{\pm}(t_1 - t_0)} - \frac{t_1^2 - t_0^2}{2(t_1 - t_0)}.$$

首先取

$$0 < t_1 - t_0 < \frac{(\min R)^2}{c^2}$$

使得 $A_{\pm}, B_{\pm}$ 有意义. 利用上式以及 $\dot{r}$ 与 r 的关系, 可求得

$$\dot{r}(t_0^+) = -\frac{R(t_0) \pm \sqrt{R^2(t_1) - c^2 \frac{(t_1 - t_0)^2}{R^2(t_0)}}}{t_1 - t_0}.$$

由于边值问题 (5-2) 要求 $\dot{r}(t_0^+) < -R(t_0)/(t_1 - t_0)$, 不难看出只有 A_+, B_+ 满足条件. 类似地, 可以说明 A_+, B_+ 使得 $\dot{r}(t_1^-) > R(t_1)/(t_1 - t_0)$ 成立. 由 A_+, B_+ 以及 $r(t)$ 的表达式,

$$r(t; t_0, t_1) = \sqrt{\frac{c^2 + A^2(t_0, t_1)(t + B(t_0, t_1))^2}{A(t_0, t_1)}}$$

关于其所有变量 (t, t_0, t_1) 是 C^r 类的函数, 其中 $A(t_0, t_1), B(t_0, t_1)$ 为 A_+, B_+ .

下面只需要证明当 $t \in (t_0, t_1)$ 时, $r(t) < R(t)$, 边值问题的解即存在且唯一. 下面说明函数 $d(t) := r^2(t) - R^2(t)$ 在区间 $t \in [t_0, t_1]$ 是严格下凸的. 只需说明对任意的 $s_0, s_1 \in (t_0, t_1)$ 且 $s_0 \neq s_1$ 有

$$d(s_1) > d(s_0) + d'(s_0)(s_1 - s_0)$$

假设 $t_1 - t_0$ 充分小, 那么 $s_1 - s_0$ 也充分小. 不妨令 $t_1 = t_0 + y, s_1 = s_0 + x, x, y$ 都为小量. 那么直接计算得到:

$$\begin{aligned} d(s_1) - d(s_0) - d'(s_0)(s_1 - s_0) &= r^2(s_0 + x) - R^2(s_0 + x) - r^2(s_0) - R^2(s_0) - \\ &\quad x(2r(s_0) \cdot \frac{A(s_0 + B)}{r(s_0)} - 2R(s_0)\dot{R}(s_0)) = 4\frac{x^2 R^2(t_0)}{y^2} + O(x^3), \end{aligned}$$

其中用到了之前计算的 A, B 以及 $r(t)$ 的表达式. 故当 $t_1 - t_0$ 充分小时, $r(t) < R(t)$ 在区间 $t \in (t_0, t_1)$ 成立. $\square$

根据文献 [12] 中的计算, 生成函数的表达式为 (与原定义相差了一个常数):

$$\begin{aligned} h(t_0, t_1) &= \frac{R^2(t_0) + R^2(t_1) + 2\sqrt{R^2(t_0)R^2(t_1) - c^2(t_1 - t_0)^2}}{2(t_1 - t_0)} \\ &\quad + c \arctan\left(\frac{c(t_1 - t_0)}{\sqrt{R^2(t_0)R^2(t_1) - c^2(t_1 - t_0)^2}}\right), \quad (5-4) \end{aligned}$$

可将 $h(t_0, t_1)$ 写成 $P(R(t_0), R(t_1), t_1 - t_0)$ 的形式, 其中 $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是一个光滑函数. 因此, 可看出当 $R(t)$ 是 C^1 函数时, h 的混合偏导仍是存在的. 这一事实对于今后的讨论是重要的.

5.2 小扭转情形下的 Aubry-Mather 集

在注 5.1.1 中已提到, 变分问题与其相应的生成函数实际上对应于一个扭转映射. 更具体地, 生成函数 (5-4) 对应了一种小扭转映射, 即当能量趋近于无穷时, 扭转映射的扭转角度趋向于某个定值, 在此例中, 此定值为 0. 由于此类扭转映射的小扭转性以及不保边界性, 不能使用圆周映射对于极小轨道的限制来得到 Aubry-Mather 集, 故 Aubry-Mather 理论对此类系统难以直接应用. 文献 [12] 中只讨论了当角动量 c 很小, 且扭转区间限制在一个闭包不含 0 的区间上的 Aubry-Mather 集. 从定理 5.1.1 可以看出, 本章证明的 Aubry-Mather 集在扭转区间 $(0, \eta)$ 上均存在.

由于处理这类问题时, 假设 h 为一个抽象的函数与考虑其具体形式 (5-4) 的区别不大, 下面将处理更一般的情形, 而后再具体地处理以 (5-4) 为生成函数的变分问题. 本节对生成函数的性质作一些限制, 应用文献 [8] 中的技巧来研究此类小扭转情形下 Aubry-Mather 集的存在性.

令 $\Omega = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 - x_0 \leq \Delta\}$, 其中 $\Delta > 0$ 为一常数. 假设 h 为 Ω 上的 C^1 类函数, 且对任意的 $(x_0, x_1) \in \Omega$, h 满足以下条件:

$$(A1) \quad h(x_0 + 1, x_1 + 1) = h(x_0, x_1);$$

$$(A2) \quad h \text{ 的混合偏导 } h_{12}(x_0, x_1) \text{ 存在且连续, 并且存在常数 } \xi > 0 \text{ 使得 } h_{12}(x_0, x_1) \leq -\xi < 0;$$

$$(A3) \quad \text{存在常数 } \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ 使得 } 1 \leq \alpha_2/\alpha_1 \leq 2^k, \text{ 且有 } \alpha_1(x_1 - x_0)^{-k} \leq h(x_0, x_1) \leq \alpha_2(x_1 - x_0)^{-k}.$$

定理 5.2.1. 在以上的假定以及条件 (A1)(A2)(A3) 下, 存在只依赖于 $\alpha_2/\alpha_1, k$ 的常数 $\sigma > 1$, 使得对任意的 $\gamma \in (0, \Delta/\sigma)$, 都存在序列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 此序列满足:

$$(1) \quad (x_i, x_{i+1}) \in \Omega, \text{ 且 } h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0;$$

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i/i = \gamma.$$

且当 $\gamma = p/q$ 为有理数时 (p, q 为互素的整数), $x_{i+q} = x_i + p$ 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$ 成立; 当 γ 为无理数, 集合 $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 的闭包在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上可能为整个圆周, 也可能是一个 Cantor 集.

5.2.1 周期构型

同文献 [8] 类似, 首先处理周期构型. 本小节主要说明: 对旋转数作合适的限制, 可使得周期序列在变分空间的内部取到极小.

定义 5.2.1. 对于 $n \geq 2$, 我们称线段 $(x_0, \dots, x_n)$ 为容许线段, 若当 $0 \leq i \leq n-1$ 时, $(x_i, x_{i+1}) \in \Omega$; 若 $(x_0, \dots, x_n)$ 为容许线段, 且

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} h(y_i, y_{i+1})$$

对所有满足 $y_0 = x_0, y_n = x_n$ 的容许线段 $(y_0, \dots, y_n)$ 都成立, 称 $(x_0, \dots, x_n)$ 为极小线段.

定义 5.2.2. 对于容许线段 $(x_0, \dots, x_n)$, 若当 $1 \leq i \leq n-1$ 时, 有

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0,$$

称容许线段 $(x_0, \dots, x_n)$ 是平衡的.

显然, 容许线段的子线段也是容许线段, 极小线段的子线段也是极小线段. 如果容许线段 $(x_0, \dots, x_n)$ 是极小的, 且当 $0 \leq i \leq n-1$ 时有 $0 < x_{i+1} - x_i < \Delta$, 则函数

$$H(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} h(x_i, x_{i+1})$$

在集合

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) : 0 \leq i \leq n-1, 0 < x_{i+1} - x_i \leq \Delta\}$$

的内部达到了极小, 故 $(x_1, \dots, x_{n-1})$ 为函数 H 的临界点, 那么即有

$$\forall 0 \leq i \leq n-1, h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0,$$

即此时容许线段 $(x_0, \dots, x_n)$ 是极小平衡线段.

首先研究周期构型空间. 令 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的拓扑为积拓扑. 关于该空间的讨论, 可参见 [8, 41]. 对 $p/q \in (0, \Delta]$, 定义

$$K_{p/q} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, x_{i+q} = x_i + p, 0 < x_{i+1} - x_i \leq \Delta\}.$$

若令 $x_i = ip/q$, 则 $x \in K_{p/q}$, 故 $K_{p/q}$ 非空. 定义 $K_{p/q}$ 上的函数

$$H_{p/q}(x) := \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}),$$

称 $H_{p/q}(x)$ 为周期构型 x 的作用量.

根据假设 **(A1)(A3)**, $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上能取到极小. 实际上, $H_{p/q}$ 定义在

$$M = \{(x_0, \dots, x_q) : x_q = x_0 + p, 0 < x_{i+1} - x_i \leq \Delta\}.$$

由假设 **(A1)**, 不妨设 $x_0 \in [0, 1]$. 取 $b = \sum_{i=0}^{q-1} h(ip/q, (i+1)p/q)$, 由 h 的连续性, 集合

$$B = \{(x_0, \dots, x_q) \in M : \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) \leq b\}$$

是 M 的非空闭子集. 由于 M 非紧, B 不一定为紧集. 由假设 **(A3)**, $\forall (x_0, \dots, x_q) \in B$, 存在常数 $\delta_i > 0$ 使得 $\delta_i \leq x_{i+1} - x_i \leq \Delta$. 由于 $x_0 \in [0, 1]$, 故

$$B \subset \{(x_0, \dots, x_q) : x_0 \in [0, 1], x_q = x_0 + p, \delta_i \leq x_{i+1} - x_i \leq \Delta\} \subset M,$$

即 B 为紧集的闭子集. 故 B 为紧集且 $H_{p/q}$ 在 B 可以取到极小. 由 B 的定义, 此极小也为 $H_{p,q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小.

若 $x \in K_{p/q}$ 使得 $H_{p/q}$ 达到了极小值, 称 x 为 $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小周期序列.

注 5.2.1. 若 x 为 $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小周期序列, 则 $\forall j \in \mathbb{Z}$, 线段 $(x_j, \dots, x_{j+q})$ 为极小线段.

这一小节的主要结论是:

命题 5.2.1. 存在只依赖于 $\alpha_2/\alpha_1, k$ 的常数 $\sigma > 1$, 使得当 $p/q \in (0, \Delta/\sigma)$ 时, $H_{p/q}$ 在

$K_{p/q}$ 上的极小周期序列 x 满足

$$\forall i \in \mathbb{Z}, 0 < x_{i+1} - x_i < \Delta.$$

特殊地,

$$\forall i \in \mathbb{Z}, h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0.$$

引理 5.2.1. 设 (x_0, x_1, x_2) 为极小线段, 则存在常数 $L \geq 1$ 使得

$$L^{-1}(x_1 - x_0) \leq (x_2 - x_1) \leq L(x_1 - x_0);$$

L 只依赖于 $\alpha_2/\alpha_1, k$ 且当 $\alpha_2/\alpha_1 \rightarrow 1, L \rightarrow 1$.

证明: 令 $x_1 - x_0 = C, x_2 - x_1 = tC$. 首先估计 t 的上界. 令 $s = (x_2 - x_0)/2$. 由

$$x_2 - s = s - x_0 = \frac{1}{2}(x_2 + x_0),$$

(x_0, s, x_2) 为容许线段. 由 (x_0, x_1, x_2) 的极小性以及 **(A3)**, 有

$$\begin{aligned} \alpha_1 C^{-k}(1 + t^{-k}) &= \frac{\alpha_1}{(x_1 - x_0)^k} + \frac{\alpha_1}{(x_2 - x_1)^k} \leq h(x_0, x_1) + h(x_1, x_2) \\ &\leq h(x_0, s) + h(s, x_2) \leq \frac{\alpha_2}{(s - x_0)^k} + \frac{\alpha_2}{(x_2 - s)^k} = 2^{k+1} \alpha_2 C^{-k}(1 + t)^{-k}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2^{k+1}}(1 + t^{-k})(1 + t)^k \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (5-5)$$

令

$$g(t) = \frac{1}{2^{k+1}}(1 + t^{-k})(1 + t)^k,$$

则当 $t \geq 1$ 时, g 严格单调递增. 令 $L = g^{-1}(\alpha_2/\alpha_1)$. 不等式 (5-5) 即为 $g(t) \leq g(L)$, 故 $t \leq L$, 即 $(x_2 - x_1) \leq L(x_1 - x_0)$. 由 L 的定义, 当 $\alpha_2/\alpha_1 \rightarrow 1$ 时, $L \rightarrow 1$.

对于下界, 令 $h_0(y_0, y_1) := h(-y_1, -y_0)$, 显然 h_0 也定义在 Ω 上且 h_0 满足 **(A1)(A2)(A3)**. 由 h_0 的定义, $(-x_2, -x_1, -x_0)$ 为 h_0 的极小线段, 故应用上述上界即得到 $L^{-1}(x_1 - x_0) \leq (x_2 - x_1)$. $\square$

引理 5.2.2. 对于极小线段 $(x_0, \dots, x_N)$, 令

$$\delta_N := \min_{0 \leq i \leq N-1} (x_{i+1} - x_i), \quad \Delta_N := \max_{0 \leq i \leq N-1} (x_{i+1} - x_i),$$

则存在只依赖于 $\alpha_2/\alpha_2, k$ 的常数 $\sigma > 1$, 使得

$$\Delta_N \leq \sigma \delta_N.$$

证明: 设 $0 \leq m, n \leq N-1$ 使得

$$\delta_N = x_{m+1} - x_m, \Delta_N = x_{n+1} - x_n.$$

首先取 $\sigma \geq 2L$, 其中 L 为引理 5.2.1 中的常数. 不失一般性, 设 $m \leq n$. 当 $m = n$, 则 $\delta_N = \Delta_N$, 故结论成立. 当 $m+1 = n$, 由引理 5.2.1, $\Delta_N \leq L\delta_N \leq \sigma\delta_N$. 故只需考虑 $m+2 \leq n$ 时的情况.

考虑线段

$$(x_0, \dots, x_m, x_{m+2}, \dots, x_n, s, x_{n+1}, \dots, x_N),$$

其中 $s = (x_{n+1} + x_n)/2$. 此线段即删去了 x_{m+1} 但在 x_n 与 x_{n+1} 之间添加了 s . 首先需说明此线段为容许线段. 注意到

$$0 < x_{m+2} - x_m = x_{m+2} - x_{m+1} + x_{m+1} - x_m \leq (L+1)(x_{m+1} - x_m) \leq 2L\delta_N.$$

由于 $\sigma \geq 2L$, 当 $2L\delta_N \geq \Delta$, 则 $\sigma\delta_N \geq 2L\delta_N \geq \Delta \geq \Delta_N$, 即结论成立. 故只需考虑 $2L\delta_N \leq \Delta$ 的情形, 即 $(x_m, x_{m+2}) \in \Omega$. 显然 $(x_n, s), (s, x_{n+1}) \in \Omega$. 由原线段的极小性, 有

$$h(x_m, x_{m+1}) + h(x_{m+1}, x_{m+2}) + h(x_n, x_{n+1}) \leq h(x_m, x_{m+2}) + h(x_n, s) + h(s, x_{n+1}).$$

利用假设 **(A3)** 及 $x_{m+2} - x_{m+1} \leq L\delta_N, x_{m+2} - x_m \geq 2\delta_N$, 有

$$\frac{\alpha_1}{\delta_N^k} + \frac{\alpha_1}{(L\delta_N)^k} + \frac{\alpha_1}{\Delta_N^k} \leq \frac{\alpha_2}{(2\delta_N)^k} + \frac{2\alpha_2}{(\Delta_N/2)^k},$$

即

$$\frac{1}{\delta_N^k}(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2^k} + \frac{\alpha_1}{L^k}) \leq \frac{1}{\Delta_N^k}(2^{k+1}\alpha_2 - \alpha_1).$$

由于 $\alpha_1 \geq \alpha_2/2^k$, 故

$$\frac{\delta_N}{\Delta_N} \geq \left(\frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2^k} + \frac{\alpha_1}{L^k}}{2^{k+1}\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1 - \frac{a}{2^k} + \frac{1}{L^k}}{2^{k+1}a - 1} \right)^{\frac{1}{k}},$$

其中 $a = \alpha_2/\alpha_1$. 令

$$\sigma = \max\{2L, (\frac{1 - \frac{a}{2^k} + \frac{1}{L^k}}{2^{k+1}a - 1})^{-\frac{1}{k}}\},$$

由 L 也只与 $\alpha_2/\alpha_1, k$ 有关, 即得到所证结论. $\square$

命题 5.2.1 的证明: 设 x 为 $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小周期序列, 则 $(x_0, \dots, x_q)$ 为极小线段. 令

$$\delta_q := \min_{0 \leq i \leq q-1} (x_{i+1} - x_i), \quad \Delta_q := \max_{0 \leq i \leq q-1} (x_{i+1} - x_i).$$

不妨设 $\Delta_q = \Delta$. 那么根据 δ_q 的定义以及引理 5.2.2 有:

$$p = x_q - x_0 = \sum_{i=0}^{q-1} (x_{i+1} - x_i) \geq q\delta_q \geq \frac{\Delta_q q}{\sigma} = \frac{\Delta q}{\sigma},$$

与假设 $p/q \in (0, \Delta/\sigma)$ 矛盾. 故 $\Delta_q < \Delta$. $\square$

5.2.2 极小周期序列的保序性

定义 5.2.3. 设 $x \in \mathbb{R}^Z$, x 的任一个子线段都为平衡线段, 称 x 为平衡构型.

定义 5.2.4. 设 $x \in \mathbb{R}^Z$, x 的任一个子线段都为极小平衡线段, 称 x 为极小平衡构型.

在文献 [8] 中对生成函数 h 有四个基本假设: **(H1, H2, H3, H4)**, 其中 **(H1)** 与 **(A1)** 相同, **(H2)** 与 **(A2)** 类似, 都为生成函数的增长性假设. 下面根据假设 **(A1)(A2)(A3)**, 得到

(H3) 设 $(x_0, x_1), (y_0, y_1), (x_0, y_1), (x_1, y_0) \in \Omega$ 且 $x_0 < y_0, x_1 < y_1$, 则 $h(x_0, x_1) + h(y_0, y_1) < h(x_0, y_1) + h(x_1, y_0)$;

(H4) 若 $(x_{-1}, x_0, x_1) \neq (y_{-1}, y_0, y_1)$ 为平衡线段, 且 $x_0 = y_0$, 则 $(x_{-1} - y_{-1})(x_1 - y_1) < 0$; 若更进一步地, $(x_{-1}, x_0, x_1) \neq (y_{-1}, y_0, y_1)$ 是极小平衡线段, 则 (x_{-1}, x_0, y_1) 与 (y_{-1}, y_0, x_1) 都不是极小的.

(H3) 的证明: 对 h_{12} 在顶点为 $(x_0, x_1), (y_0, y_1), (x_0, y_1), (x_1, y_0)$ 的矩形上积分得

$$h(x_0, x_1) + h(y_0, y_1) - h(x_0, y_1) - h(x_1, y_0) \leq -\xi(y_0 - x_0)(y_1 - x_1) < 0,$$

其中我们用到了 **(A2)**.

(H4) 的证明: 由于 $h_{12} < 0$ 故 $h_1(\xi, \eta)$ 关于 η 单调递减, $h_2(\xi, \eta)$ 关于 ξ 单调递减. 因为 $(x_{-1}, x_0, x_1) \neq (y_{-1}, y_0, y_1)$ 为平衡线段, 故

$$h_2(x_{-1}, x_0) + h_1(x_0, x_1) = h_2(y_{-1}, y_0) + h_1(y_0, y_1) = 0.$$

若 $x_{-1} > y_{-1}$, 则 $h_2(x_{-1}, x_0) < h_2(y_{-1}, y_0)$, 由上式可得到 $h_1(x_0, x_1) > h_1(y_0, y_1)$, 即 $x_1 < y_1$, 结论成立; $x_{-1} < y_{-1}$ 时类似地有 $x_1 > y_1$. 若 $x_{-1} = y_{-1}$, 则 $h_1(x_0, x_1) = h_1(y_0, y_1)$, 即 $x_1 = y_1$, 与假设矛盾.

显然 (x_{-1}, x_0, y_1) 与 (y_{-1}, y_0, x_1) 都为容许线段. 由 $(x_{-1} - y_{-1})(x_1 - y_1) < 0$, 不妨假设 $x_{-1} < y_{-1}, x_1 > y_1$. 设 (x_{-1}, x_0, y_1) 与 (y_{-1}, y_0, x_1) 都为极小线段. 对于线段 (y_{-1}, y_0, x_1) , 有

$$\begin{aligned} 0 < y_0 - y_{-1} < x_0 - x_{-1} \leq \Delta, \\ 0 < y_1 - y_0 < x_1 - y_0 = x_1 - x_0 \leq \Delta, \end{aligned}$$

即可增加 y_0 使得 (y_{-1}, y_0, x_1) 仍为容许序列. 所以根据 (y_{-1}, y_0, x_1) 的极小性, 有

$$h_2(y_{-1}, y_0) + h_1(y_0, x_1) \geq 0.$$

将 $h_2(y_{-1}, y_0)$ 替换为 $-h_1(y_0, y_1)$ 得到

$$h_1(y_0, x_1) \geq h_1(y_0, y_1),$$

但这与 $x_1 > y_1$ 以及 $h_1(\xi, \eta)$ 关于 η 单调递减矛盾. 类似地可以说明线段 (y_{-1}, y_0, x_1) 也不是极小的. $\square$

(H4) 是与文献 [8] 中的假设区别最多的地方, 这是由于边界的存在, 极小线段不一定是平衡的.

定义 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 中的严格偏序:

$$x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

一个 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 的子集 S 称作是完全有序的, 如果

$$x \neq y \in S, \text{ 则 } x < y \text{ 或 } y < x.$$

对于 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 令

$$T_{(a,b)}x = x^*, \quad x_i^* = x_{i-a} + b.$$

命题 5.2.2. 对 $p/q \in (0, \Delta/\sigma)$, 若 x 为 $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小周期序列, 则 x 是极小平衡构型, 且集合

$$\{T_{(a,b)}x : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

是完全有序的.

定义 5.2.5. $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 称作是相交的, 如果存在 $i \in \mathbb{Z}$ 使得下面任一个条件成立:

$$(i) \quad x_i = y_i \text{ 且 } (x_{i-1} - y_{i-1})(x_{i+1} - y_{i+1}) < 0;$$

$$(ii) \quad (x_i - y_i)(x_{i+1} - y_{i+1}) < 0.$$

由 (H4), 若 x, y 为两条平衡构型, 则 x 与 y 相交或者集合 $\{x, y\}$ 完全有序. 如果作出 x 的图像, 即将点列 $\{(i, x_i)\}$ 用直线逐点连接, 则 x, y 不相交当且仅当两者的图像不相交, 见图 5-1.

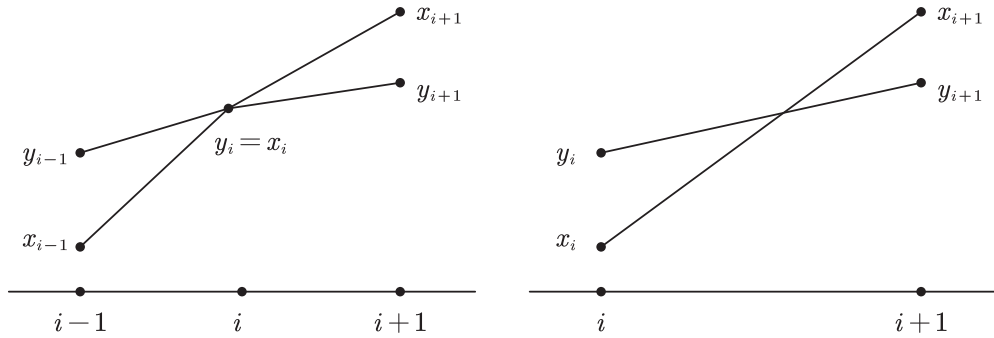


图 5-1 x, y 在 i 处与在 $i, i+1$ 处相交.

命题 5.2.2 的证明: 以下总假设 $p/q \in (0, \Delta/\sigma)$. 由命题 5.2.1, 若 x, y 都为 $H_{p/q}$ 在 $K_{p/q}$ 上的极小周期序列, 则 x, y 是平衡构型. 故要么 x, y 不相交, 要么 $\{x, y\}$ 完全有序. 下面说明 x, y 不相交. 特殊地, 集合

$$\{T_{(a,b)}x : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

完全有序. 由于只有 $q \geq 2$ 时 x, y 才可能相交, 设 $q \geq 2$. 定义 $z^+, z^- \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 如下:

$$z_i^+ = \max\{x_i, y_i\}, \quad z_i^- = \min\{x_i, y_i\}.$$

易见 z^+, z^- 的任一子段都为容许线段且 $z^+, z^- \in K_{p/q}$. 若 x, y 在 i 处相交, 不失一般性, 设 $i = 1$. 由 (H4), (z_0^+, z_1^+, z_2^+) 不是极小的. 取 $\bar{z}_1$ 使得 $(z_0^+, \bar{z}_1, z_2^+)$ 为容许序列且

$$h(z_0^+, \bar{z}_1) + h(\bar{z}_1, z_2^+) < h(z_0^+, z_1^+) + h(z_1^+, z_2^+).$$

如此定义 $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 使得 $\forall k \in \mathbb{Z}, z_{qk+1} = \bar{z}_1 + kp$, 且在其余位置 z 与 z^+ 相同. 那么有 $z \in K_{p/q}$, 且

$$H_{p/q}(z) < H_{p/q}(z^+) \leq H_{p/q}(x),$$

与 x 的定义矛盾. 若 x, y 在 $i, i+1$ 处相交, 由 (H3),

$$H_{p/q}(z^+) + H_{p/q}(z^-) < H_{p/q}(x) + H_{p/q}(y),$$

与 x, y 的定义矛盾. 总结下来, 已证明了集合

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : x \text{ 为 } H_{p/q} \text{ 在 } K_{p/q} \text{ 上的极小周期序列}\}$$

是完全有序的.

下面证明在假设下 x 也为极小平衡构型, 由假设只需证 x 的任一子段都是极小的. 对 $n \geq 1$, 设 w 为 $H_{np/nq}$ 在 $K_{np/nq}$ 上的极小周期序列. 首先 $w \in K_{p/q}$. 实际上, 由于 $\{w, T_{(q,p)}w\}$ 完全有序, 若 $w < T_{(q,p)}w$, 则连续作用 $T_{(q,p)}$ 得到 $w < T_{(nq,np)}w$, 矛盾. 故 $w = T_{(q,p)}w$, 即 $w \in K_{p/q}$. 故有

$$H_{(np/nq)}^{\min} = nH_{(p/q)}^{\min},$$

由于对于 $x \in K_{p/q} \subset K_{np/nq}$, $H_{(np/nq)}(x) = nH_{(p/q)}(x)$. 所以, 如果 x 为 $H_{p/q}$ 的极小, x 也为 $H_{np/nq}$ 的极小. 特殊地, 对于任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 线段

$$(x_i, \dots, x_{i+nq})$$

是极小的. 由 n 可以任意大, x 的任意子段都是极小的. □

5.2.3 无理极小平衡构型的存在性

本节考虑使用保序的周期极小平衡构型去逼近无理的极小平衡构型.

定义 5.2.6. 称 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 为 *Birkhoff* 构型, 如果 x 是平衡构型且集合

$$B_x = \{T_{(a,b)}x : (a,b) \in \mathbb{Z}^2\},$$

的闭包 $\overline{B_x}$ 是完全有序的.

对于 *Birkhoff* 构型 x , 定义投影 $p_i(x) = x_i$. 首先可以看出映射 $p_0|_{\overline{B_x}}: \overline{B_x} \rightarrow p_0(\overline{B_x})$ 是一个双射, 这是由于 p_0 保持序关系. 又由于投影 p_i 是连续的开映射, 故 $p_0|_{\overline{B_x}}$ 是一个同胚.

称 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个保向圆周同胚, 如果 f 连续且严格单调递增, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$.

命题 5.2.3. 对于每一个 *Birkhoff* 构型 x , 存在一个保向圆周同胚 f , 使得 $\forall i \in \mathbb{Z}$, $x_{i+1} = f(x_i)$.

证明: 首先在一个闭子集 $A = p_0(\overline{B_x})$ 上定义 f , 通过以下两种等价的方式,

$$f(y_0) := y_1, y \in \overline{B_x}; f := p_1 \circ (p_0|_{\overline{B_x}})^{-1}.$$

根据 p_0 在 $\overline{B_x}$ 上是同胚及 $\overline{B_x}$ 的完全有序性, f 的定义是确定的, 且 f 严格单调递增. $f(t+1) = f(t) + 1$, $\forall t \in A$, 这是由于在 $x_0 + 1$ 对应的轨道一定是 x_0 对于的轨道向上平移一个单位. 在 $\mathbb{R} \setminus A = \cup(a_n, b_n)$ 上通过直线连接来定义 f ,

$$f((1-t)a_n + tb_n) := (1-t)f(a_n) + tf(b_n), t \in [0, 1].$$

这样在直线的部分也是严格单调的, 也保证了连续性. 故 f 为一个保向圆周同胚, 且有 $f(x_i) = f((T_{(-i,0)}x)_0) = x_{i+1}$. $\square$

对于任一个 *Birkhoff* 构型 x , 定义 x 的旋转数

$$\rho(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{i}.$$

由命题 5.2.3, 上式中的极限存在. 且根据 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的拓扑, ρ 是连续映射 (见 [41, Lemma 9.1]). 注意到, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, 若 $\overline{B_x}$ 完全有序, 则 $\rho(x)$ 都有定义.

引理 5.2.3. (1) 若对于 $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 为 *Birkhoff* 构型, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^{(n)} \rightarrow x^*$, 且有

$$\forall i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \delta \leq x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \leq \Delta,$$

其中 $\delta > 0$ 为常数, 则 x^* 也为 *Birkhoff* 构型.

(2) 若 x 为平衡构型, B_x 完全有序, 且

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \delta \leq x_{i+1} - x_i \leq \Delta,$$

其中 $\delta > 0$ 为常数, 则 $\overline{B_x}$ 也完全有序.

证明: 只证明 (1), (2) 的证明是完全类似的. 由假设, 对所有的 $i \in \mathbb{Z}$,

$$0 < \delta \leq x_{i+1}^* - x_i^* \leq \Delta,$$

故 x^* 为容许序列且函数 $h_2(x_{i-1}^*, x_i^*), h_1(x_i^*, x_{i+1}^*)$ 定义完好. 根据 h_2, h_1 的连续性, x^* 也为平衡构型.

对于 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 同上述论证, $T_{(a,b)}x^{(n)}$ 收敛于 $T_{(a,b)}x^*$, 且 $T_{(a,b)}x^*$ 为平衡构型. 由 (H4), $T_{(a,b)}x^*, x^*$ 要么相交要么两者完全有序. 若 $T_{(a,b)}x^*, x^*$ 相交在 $i, i+1$ 处, 可取充分大的 N , 使得当 $n > N$ 时 $T_{(a,b)}x^{(n)}, x^{(n)}$ 也相交在 $i, i+1$ 处, 与 $x^{(n)}$ 为 *Birkhoff* 构型这一事实矛盾. 若 $T_{(a,b)}x^* = y^*, x^*$ 在 i 处相交, 由 (H4), 有

$$(y_{i-1}^* - x_{i-1}^*)(y_{i+1}^* - x_{i+1}^*) < 0.$$

可取充分大的 N 使得当 $n > N$ 时

$$(y_{i-1}^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})(y_{i+1}^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) < 0$$

仍成立, 其中 $y^{(n)} = T_{(a,b)}x^{(n)}$, 矛盾. 故集合 B_{x^*} 完全有序. 类似地可证明其闭包也是完全有序的. 故 x^* 为 *Birkhoff* 构型. $\square$

推论 5.2.1. 设 $p/q \in (0, \Delta/\sigma)$, x 为 $H_{p/q}$ 在集合 $K_{p/q}$ 的极小周期序列, 则 x 是极小的 *Birkhoff* 构型, 且 $\rho(x) = p/q$.

证明: 由命题 5.2.2, x 为极小平衡构型且集合 B_x 完全有序, 根据引理 5.2.3, $\overline{B_x}$ 也完全有序. 故 x 为极小的 *Birkhoff* 构型. 由 x 的周期性, 命题 5.2.3 构造的保向圆周同胚有一条 (p, q) 型周期轨道, 故 $\rho(x) = p/q$. $\square$

这样, 区间 $(0, \Delta/\sigma)$ 中所有以有理数为旋转数的 *Birkhoff* 构型的存在性已经得到证明, 下面利用引理 5.2.3, 证明区间 $(0, \Delta/\sigma)$ 中无理数同样也对应有 *Birkhoff* 构型, 且

此 Birkhoff 构型也为极小平衡构型.

引理 5.2.4. 对任意的无理数 $\alpha \in (0, \Delta/\sigma)$, 取序列 $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $p_n/q_n \in (0, \Delta/\sigma)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = \alpha$. 令 $x^{(n)}$ 为 H_{p_n/q_n} 在集合 K_{p_n/q_n} 的极小周期序列, 则存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\delta \leq x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \leq \Delta.$$

证明: 不妨设不存在这样的 $\delta > 0$. 对于 $x^{(n)}$, 令

$$\delta_n := \min_{0 \leq i \leq q_n-1} (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}), \quad \Delta_n := \max_{0 \leq i \leq q_n-1} (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}).$$

由假设, 存在子列 (仍用原来下标) 使得 $\delta_n \rightarrow 0$. 根据引理 5.2.2, $\sigma\delta_n \geq \Delta_n$, 故 $\Delta_n \rightarrow 0$. 不失一般性, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 假设 $x_0^{(n)} \in [0, 1]$. 那么由于 $0 \leq x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \leq \Delta$, 对所有的 $n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}$, $x_i^{(n)}$ 包含在一个紧区间内, 故存在 $\{x^{(n)}\}$ 的子列使得 $x^{(n)} \rightarrow x^*$. 由 $\Delta_n \rightarrow 0$, 存在常数 c 使得 $x_i^* = c, \forall i \in \mathbb{Z}$. 显然函数 ρ 在 x^* 上有定义, 且 $\rho(x^*) = 0$. 然而, 当 $x^{(n)}$ 趋于 x^* 时, $\rho(x^{(n)}) \rightarrow \alpha > 0$, 这与 ρ 的连续性矛盾. $\square$

引理 5.2.5. 对于 $0 < \delta \leq \Delta$, 集合

$$\mathcal{M}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : x \text{ 为极小平衡构型且 } \delta \leq x_{i+1} - x_i \leq \Delta\}.$$

是 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 的闭子集.

证明: 由于 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 中的收敛是逐点收敛, 故只需考虑有限子段即可. 不失一般性, 设当 $n \rightarrow \infty$ 时, 满足 $\delta \leq x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \leq \Delta$ ($i = 0, 1$) 的极小平衡线段 $(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ 收敛到 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) , 只需说明 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 也为极小平衡线段且 $\delta \leq x_{i+1}^* - x_i^* \leq \Delta$ ($i = 0, 1$).

显然, 对 $i = 0, 1$, $\delta \leq x_{i+1}^* - x_i^* \leq \Delta$, 且由于函数 h_1, h_2 的连续性, 有

$$h_2(x_0^*, x_1^*) + h_1(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

故只需证线段 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 是极小的. 首先, 若 $x_1^* - x_0^* = x_2^* - x_1^* = \Delta$, 则对固定的 x_0^*, x_2^* 有且仅有一个容许序列, (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 自然是极小的. 不妨设 $x_1^* - x_0^* = \Delta$, $x_2^* - x_1^* < \Delta$. 若 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 不是极小的, 则存在 $x_1 < x_1^*$ 且 $0 < x_1 - x_0^* < \Delta$, $0 < x_2^* - x_1 < \Delta$ 使得

$$h(x_0^*, x_1) + h(x_1, x_2^*) < h(x_0^*, x_1^*) + h(x_1^*, x_2^*).$$

由 h 的连续性, 可取 N 充分大使得当 $n > N$ 时, $0 < x_1 - x_0^{(n)} < \Delta$, $0 < x_2^{(n)} - x_1 < \Delta$ 仍成立且

$$h(x_0^{(n)}, x_1) + h(x_1, x_2^{(n)}) < h(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}) + h(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}),$$

与 $(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ 的极小性矛盾. $x_1^* - x_0^* < \Delta$, $x_2^* - x_1^* = \Delta$ 与 $x_1^* - x_0^* < \Delta$, $x_2^* - x_1^* < \Delta$ 的情况证明类似. $\square$

定理 5.2.1 的证明: 当 $\alpha = p/q \in (0, \Delta/\sigma)$, 已说明存在极小的 Birkhoff 构型满足定理 5.2.1 的条件. 当 $\alpha \in (0, \Delta/\sigma)$ 为无理数时, 取序列 $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 使得其满足引理 5.2.4 的条件, 取引理 5.2.4 中的 δ . 定义

$$\mathcal{M}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{Z} : x \text{ 为极小平衡构型且 } \delta \leq x_{i+1} - x_i \leq \Delta\}.$$

由引理 5.2.5 及命题 5.2.2, $\mathcal{M}_\delta$ 为 $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ 的一个闭子集且 $x^{(n)} \in \mathcal{M}_\delta$. 不失一般性, 设 $x_0^{(n)} \in [0, 1]$. 由 $x^{(n)} \in \mathcal{M}_\delta$, 则 $x_i^{(n)}$ 包含在一个紧区间内, 故存在 $\{x^{(n)}\}$ 的子列使得 $x^{(n)} \rightarrow x^* \in \mathcal{M}_\delta$. 根据引理 5.2.3, 引理 5.2.5, 以及 $x^{(n)}$ 为 Birkhoff 构型, 可得 x^* 为极小的 Birkhoff 构型. 由 ρ 的连续性, $\rho(x^*) = \alpha$. 故 x^* 即为所求序列. 由于 x^* 可作为一个圆周同胚的轨道且此圆周同胚的旋转数是无理数, 由圆周映射的分类定理^[112] 可知: x^* 的闭包作为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的子集, 其可能为整个圆周也可能为一个 Cantor 集. $\square$

5.3 定理 5.2.1 在呼吸圆台球上的应用

将系统 (5-1) 的生成函数重新给出:

$$h(t_0, t_1) = \frac{R^2(t_0) + R^2(t_1) + 2\sqrt{R^2(t_0)R^2(t_1) - c^2(t_1 - t_0)^2}}{2(t_1 - t_0)} + c \arctan \left(\frac{c(t_1 - t_0)}{\sqrt{R^2(t_0)R^2(t_1) - c^2(t_1 - t_0)^2}} \right),$$

通过直接计算, 当 $t_1 - t_0$ 充分小时有

$$\begin{aligned} h(t_0, t_1) &= \frac{(R(t_0) + R(t_1))^2}{2(t_1 - t_0)} + O((t_1 - t_0)), \\ h_{12}(t_0, t_1) &= -\frac{(R(t_0) + R(t_1))^2}{(t_1 - t_0)^3} + O\left(\frac{1}{(t_1 - t_0)^2}\right). \end{aligned} \quad (5-6)$$

由 h 的表达式及 $R(t)$ 是 C^1 类函数, h_{12} 存在且连续.

所以当 $t_1 - t_0$ 充分小时, 条件 (A1)(A2) 可以满足. 但对于条件 (A3), 取 $k = 1$, 则当 $t_1 - t_0$ 充分小时有

$$\frac{2 \min R(t) - d(t_1 - t_0)}{t_1 - t_0} \leq h(t_0, t_1) \leq \frac{2 \max R(t) + d(t_1 - t_0)}{t_1 - t_0},$$

其中 d 为常量. 为了使 (A3) 在 $t_1 - t_0$ 充分小时成立, 需要作

$$\frac{\max R(t)}{\min R(t)} < 2$$

这样的假设.

为了克服这一问题, 作变换 $\mathcal{N} : (t_0, t_1) \mapsto (\tau_0, \tau_1)$

$$\tau_0 = \int_0^{t_0} \frac{1}{R^2(s)} ds, \quad \tau_1 = \int_0^{t_1} \frac{1}{R^2(s)} ds.$$

这个时间尺度的变换在第四章中的“停止墙壁”变换中已出现. 若令

$$T = \int_0^1 \frac{1}{R^2(s)} ds,$$

则有 $t_0(\tau_0 + T) = t_0(\tau_0) + 1$, $t_1(\tau_1 + T) = t_1(\tau_1) + 1$. 根据上述定义, 对新坐标下的生成函数有

$$H(\tau_0, \tau_1) := h(t_0(\tau_0), t_1(\tau_1)), \quad H(\tau_0 + T, \tau_1 + T) = H(\tau_0, \tau_1).$$

可以看出, H 仍为 C^1 类的函数, 且 H 的混合偏导数存在. 注意到, 如果 $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 为 H 的平衡序列, 则

$$H_2(\tau_{i-1}, \tau_i) + H_1(\tau_i, \tau_{i+1}) = \frac{dt_i}{d\tau_i} h_2(t_{i-1}, t_i) + \frac{dt_i}{d\tau_i} h_1(t_i, t_{i+1}) = 0,$$

其中 t_i 由 $\tau_i = \int_0^{t_i} \frac{1}{R^2(s)} ds$ 所定义. 由于 $dt_i/d\tau_i$ 始终大于 0, 故 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 为 h 的平衡序列.

引理 5.3.1. 令 $\mathcal{D} = \{(t_0, t_1) : 0 < t_1 - t_0 \leq \xi\}$, 则存在 η 使得 $\{(\tau_0, \tau_1) : 0 < \tau_1 - \tau_0 \leq$

$\eta\} \subset \mathcal{N}(\mathcal{D})$, 且当 $\tau_1 - \tau_0$ 充分小时, 有

$$\begin{aligned} H(\tau_0, \tau_1) &= \frac{2}{(\tau_1 - \tau_0)} + O(1), \\ H_{12}(\tau_0, \tau_1) &= -\frac{4}{(\tau_1 - \tau_0)^3} + O((\tau_1 - \tau_0)^{-2}). \end{aligned}$$

证明: 由定义,

$$\frac{t_1 - t_0}{\max R^2(t)} \leq \tau_1 - \tau_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{R^2(s)} ds \leq \frac{t_1 - t_0}{\min R^2(t)}.$$

令 $\eta = \xi / \min R^2(t)$, 则 $\{(\tau_0, \tau_1) : 0 < \tau_1 - \tau_0 \leq \eta\} \subset \mathcal{N}(\mathcal{D})$. 由于上式, $O(t_1 - t_0) \sim O(\tau_1 - \tau_0)$. 利用 τ_0, τ_1 的定义有

$$\tau_1 - \tau_0 = \int_{t_0}^{t_0+t_1-t_0} \frac{1}{R^2(s)} ds = \frac{t_1 - t_0}{R^2(t_0)} + O((t_1 - t_0)^2),$$

故

$$t_1 - t_0 = R^2(t_0)(\tau_1 - \tau_0) + O((\tau_1 - \tau_0)^2).$$

利用 (5-6), 可以得到

$$\begin{aligned} H(\tau_0, \tau_1) &= \frac{(R(t_0) + R(t_1))^2}{2(t_1 - t_0)} + O((t_1 - t_0)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(R(t_0) + R(t_0 + t_1 - t_0))^2}{R^2(t_0)(\tau_1 - \tau_0) + O((\tau_1 - \tau_0)^2)} + O((\tau_1 - \tau_0)) \\ &= \frac{2}{(\tau_1 - \tau_0)} + O(1). \end{aligned}$$

由于 $H_{12}(\tau_0, \tau_1) = h_{12}(t_0(\tau_0), t_1(\tau_1))t'_0(\tau_0)t'_1(\tau_1)$, 利用 (5-6) 可以类似地得到

$$\begin{aligned} H_{12}(\tau_0, \tau_1) &= -\frac{(R(t_0) + R(t_1))^2}{(t_1 - t_0)^3} \cdot R^2(t_0)R^2(t_1) + O\left(\frac{1}{(t_1 - t_0)^2}\right) \\ &= -\frac{4}{(\tau_1 - \tau_0)^3} + O((\tau_1 - \tau_0)^{-2}). \end{aligned}$$

□

定理 5.1.1 的证明: 由引理 5.3.1, 存在常数 $\bar{\Delta} > 0$ 使得当 $0 < \tau_1 - \tau_0 \leq \bar{\Delta}$ 时, $H(\tau_0, \tau_1)$ 满足条件 (A1)(A2)(A3). 实际上, 此时周期性条件 (A1) 变为 $H(\tau_0 + T, \tau_1 + T) = H(\tau_0, \tau_1)$. 由引理 5.3.1 中 H_{12} 的表达式, 当 $\tau_1 - \tau_0$ 充分小时 (A2) 成立. 取 $k =$

1, $\alpha_2 = 2 + \epsilon, \alpha_1 = 2 - \epsilon$, 当 $\tau_1 - \tau_0$ 充分小, ϵ 也可取得充分小使得 (A3) 成立. 因此, 根据定理 5.2.1, 存在常数 $\eta > 0$ 使得对任意的 $\alpha \in (0, \eta)$ 都存在序列 $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 使得

$$(1) \quad 0 < \tau_{i+1} - \tau_i \leq \bar{\Delta} \text{ 且 } H_2(\tau_{i-1}, \tau_i) + H_1(\tau_i, \tau_{i+1}) = 0;$$

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \tau_i/i = T\alpha.$$

当 $\alpha = p/q$ 为有理数时 (p, q 为互素的整数), $\tau_{i+q} = \tau_i + pT$ 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$ 成立; 当 α 为无理数, 集合 $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 的闭包在圆周 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上可能为整个圆周, 也可能是一个 Cantor 集.

现在可以将上述结论返回到原来的时间 t . 首先取 $\bar{\Delta} > 0$ 充分小使得当 $0 < \tau_1 - \tau_0 \leq \bar{\Delta}$ 时, $0 < t_1 - t_0 \leq \delta$, 其中 δ 为定义 5.1.1 中的常数. 对于 $\alpha \in (0, \eta)$, 取序列 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 其中 t_i 由上述满足条件 (1)(2) 的 τ_i 所确定, $\tau_i = \int_0^{t_i} \frac{1}{R^2(s)} ds$. 由于 $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 为 H 的平衡序列, $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 为 h 的平衡序列. 由 $\bar{\Delta}$ 的取法, $0 < t_1 - t_0 \leq \delta$. 下面我们验证旋转数条件. 如果序列 $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 的旋转数为 $T\alpha$, 那么相应的 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的旋转数为 α . 实际上, 对充分大的 $|i|$ 有

$$\begin{aligned} |\tau_i - iT\alpha| \leq C &\Leftrightarrow \left| \int_0^{t_i} \frac{1}{R^2(s)} ds - \alpha \int_0^i \frac{1}{R^2(s)} ds \right| \leq C \\ &\Leftrightarrow \left| \int_0^{t_i} \frac{1}{R^2(s)} ds - \int_0^{\alpha i} \frac{1}{R^2(s)} ds \right| \leq C_1 \Leftrightarrow |t_i - \alpha i| \leq C_2, \end{aligned}$$

其中 C, C_1, C_2 为常数, 且用到了以下事实: 当 $|i|$ 充分大, 由 $R(t)$ 的周期性, $\alpha \int_0^i \frac{1}{R^2(s)} ds$ 与 $\int_0^{\alpha i} \frac{1}{R^2(s)} ds$ 的差值是有限的. 当 $\alpha = p/q$ 为有理数, 由 t_i 的定义, $\tau_{i+q} = \tau_i + pT \Leftrightarrow t_{i+q} = t_i + p$. 当 α 为无理数, 由于映射 $\tau \mapsto t$ 为 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的一个微分同胚, 故集合的拓扑性质是一致的. 证毕. $\square$

5.4 本章小结

本章首先考虑了给定相邻两次碰撞时间的边值问题, 而后通过定义生成函数, 将寻求真实解的碰撞序列问题转变为了一个变分问题; 考虑到变分空间具有边界, 在对生成函数的适当的假设下, 首先将周期极小构型限制在变分空间的内部, 然后利用周期极小构型的保序性, 使用周期极小序列去逼近无理极小序列, 最终得到了此类小扭转情形下的 Aubry-Mather 集. 最后, 对呼吸圆台球的时间作适当的处理, 使得系统的生成函数满足先前一般理论所作的假设, 而这意味着呼吸圆台球的 Aubry-Mather 集的存在性.

第六章 干摩擦振子的相位映射与正不变环面

6.1 引言

前几章考虑的问题都属于碰撞 Hamilton 系统的范畴, 用 KAM 理论证明了不变环面的存在性. 本章考虑在实际的工程应用中常见的系统: 带有干摩擦力的强迫振动系统, 此类系统属于 Filippov 系统^[34], 此类系统最大的特点是轨线可能在分段定义的矢量场之间的超平面上滑移, 轨线往往只能正向定义, 而负向轨线可能是不唯一的, 这导致了许多复杂的动力学现象. 前人对这类系统的研究大多数集中在周期轨道的 Floquet 理论^[26], 周期轨道的非光滑分岔^[55, 61, 86], 以及数值计算^[36-38, 51, 55, 87, 91]. 本章在合适的假设下证明系统正不变环面的存在性, 即正向不变环面的存在性.

研究此类系统有一个十分重要的截面映射, 称为相位映射 (phase map). 与通常的单自由度强迫系统不同, 取某个截面得到的相位映射是一个圆周上的映射而非柱面上的映射. 由于在滑移轨道附近, 系统本质上是 2 维系统而非 3 维系统, 取合适的截面即得到了一个一维映射, 相位映射的轨道即轨线按某个规则滑出滑移面的时间序列. 文献 [87] 首先在数值上引入了这一个映射, 而后又有许多学者利用此映射研究了干摩擦系统复杂的动力学现象, 如周期解的反倍化分岔, 共振时出现的魔鬼阶梯^[55], 干摩擦系统鞍点不稳定集的数值计算^[38] 等等.

本章首先给出相位映射的严格定义, 在合适的条件下证明了当外激励较小时相位映射为圆周平移的一个光滑扰动, 这解释了文献 [55] 中数值计算的魔鬼阶梯现象. 利用拓扑的粘接方法, 证明了系统正不变环面的存在性. 当外激励较小时, 利用 KAM 理论, 说明了在相当大的概率下, 相位映射光滑共轭与一个圆周上的无理平移, 且系统的轨线在正不变环面上是处处稠密的. 本章还在数值上讨论了当外激励扰动过大时系统正不变环面的破坏机理.

6.2 干摩擦振子模型, 相位映射与本章主要结果

考虑由图 6-1 所描述的力学系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -cy - kx + F(y - v_s) + \epsilon f(t),\end{aligned}\tag{6-1}$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $k, c > 0$ 为常数, f 为 C^r ($r \geq 1$) 类的 T -周期函数, ϵ 为一个小参数,

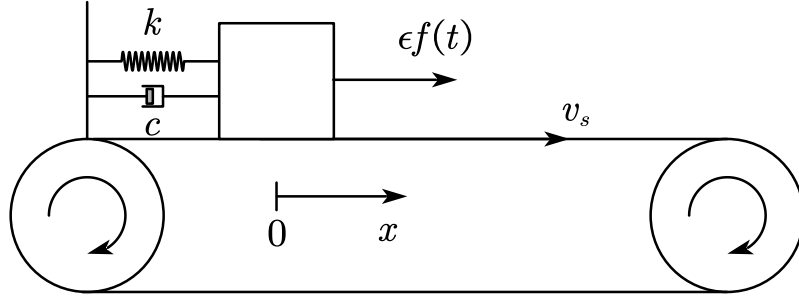


图 6-1 带有干摩擦力的振子.

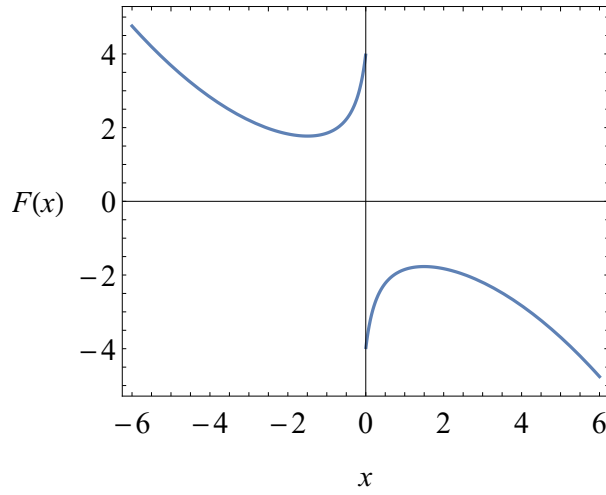
$v_s > 0$ 为皮带轮的速度. 干摩擦力 $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为:

$$F(x) = -A \operatorname{sgn}(x) \left(\frac{\alpha}{1 + \gamma|x|} + \lambda + \eta x^2 \right),$$

其中 $\alpha, \gamma, \lambda, \eta, A > 0$ 都为常数, sgn 为符号函数. 令

$$\pm F_0 = \lim_{x \rightarrow 0^\mp} F(x) = \pm A(\alpha + \lambda).$$

图 6-2 给出了 F 的函数图像 (参数在本节末尾给出). 文献 [37] 解释了 F 中参数的物理意义.

图 6-2 摩擦力函数 F 的图像.

首先, 将系统 (6-1) 扩充到扩展相空间 $\mathbb{R}^2 \times S^1$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -cy - kx + F(y - v_s) + \epsilon f(\theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{6-2}$$

本章中 $S^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. 令 $X = (x, y, \theta)$, $H(X) = y - v_s$. 由 v_s 为一个固定常数, 在滑移面

$$\{X : H(X) = 0\}$$

上, 将 $\bar{X} = (x, \theta)$ 与 (x, v_s, θ) 等同. 滑移面上的矢量场为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_s, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{6-3}$$

定义滑移面上的函数

$$M(\bar{X}) = -kx - cv_s + F_0 + \epsilon f(\theta).$$

由 M 的定义, 集合 $\{\bar{X} : M = 0\}$ 描述了最大的正向静摩擦力与其它力平衡的条件. 当轨线过了这一集合后将会进入到区域 $\{X : H < 0\}$. 由于 $M = 0$ 意味着

$$x = \frac{1}{k}(-cv_s + F_0 + \epsilon f(\theta)),$$

故 $\{\bar{X} : M = 0\}$ 作为一个由 S^1 到 $\mathbb{R}$ 的函数图像. 因此集合 $\{\bar{X} : M = 0\}$ 同胚于 S^1 并且可选取 θ 作为此集合的坐标. 用新的记号 S_ϵ 代表集合 $\{\bar{X} : M(x, \theta, \epsilon) = 0\}$, 并使用 θ 作为集合 S_ϵ 的坐标. 有了这些准备以后, 相位映射即可以严格定义了. 称在系统 (6-2) 的流下的首次回归映射

$$\mathfrak{R}_\epsilon : S_\epsilon \rightarrow S_\epsilon$$

为相位映射 (由于集合 S_ϵ 的坐标正好就是外激励的相位, 故称之). 根据定义, 相位映射的轨道即轨线由滑移面进入到区域 $\{X : H < 0\}$ 的时间序列.

一般地, 相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 可能不连续甚至在某些 S_ϵ 的点上无法定义. 因此, 需要限制在某些条件下讨论相位映射的性质. 系统 (6-1) 的一条周期轨道称作是滑移周期轨道, 如果该周期轨道与 $\{(x, y) : y = v_s\}$ 的交至少是一个线段. 本章假设如下:

H. 当 $\epsilon = 0$ 时, 系统 (6-1) 在区域 $\{(x, y) : y - v_s \leq 0\}$ 存在一条滑移周期轨道, 且以下横截性条件成立:

$$0 < -cv_s - kx_1 + F_0 < 2F_0,\tag{6-4}$$

其中 x_1 是周期轨道进入滑移面的位置坐标.

这里不讨论如何证明滑移周期轨道的存在性. 至少从数值上, 假设 **H** 在通常的参数下是成立的, 见本节末尾. 条件 (6-4) 是为了保证轨线从 $\{X : H < 0\}$ 横截地进入滑

移面而又不穿过滑移面. 对于充分小的 ϵ , 我们将证明相位映射是一个定义完好的光滑圆周同胚.

下面引入一些必要的记号, 并叙述结果. 令 $\phi(t, X, \epsilon)$ 为区域 $\{X : H < 0\}$ 中矢量场的以

$$x(0) = x, y(0) = y, \theta(0) = \theta.$$

为初值的解. 令 $\phi_s(t, \bar{X})$ 为在滑移面 $\{X : H(X) = 0\}$ 上的以初值

$$x(0) = x, \theta(0) = \theta$$

的解. 令 $h : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ 定义为

$$h(\theta, \epsilon) = \left(\frac{1}{k}(-cv_s + F_0 + \epsilon f(\theta)), v_s, \theta \right).$$

注意到 $\{h(\theta, \epsilon) : \theta \in S^1\} = S_\epsilon$, 且一条轨道离开滑移面并进入到区域 $\{X : H(X) < 0\}$ 应满足

$$(\bar{x}, v_s, \theta) = h(\theta, \epsilon),$$

其中 $(\bar{x}, v_s, \theta)$ 是轨线滑出时的状态.

在假设 **H** 下, 存在 $t^{(1)}(\theta, \epsilon), t^{(2)}(\theta, \epsilon)$ 使得

$$\begin{aligned} \phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon), h(\theta, \epsilon), \epsilon) &= (x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) \\ \phi_s(t^{(2)}(\theta, \epsilon), x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) &\in S_\epsilon, \end{aligned}$$

$t^{(1)}, t^{(2)}$ 的存在性见下节. 图 6-3 给出了这些记号的几何意义. 定义以下集合

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} &:= \bigcup_{\theta \in S^1} \bigcup_{\tau \in [0, t^{(1)}(\theta, \epsilon)]} \phi(\tau, h(\theta, \epsilon), \epsilon), \\ \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} &:= \bigcup_{\theta \in S^1} \bigcup_{\tau \in [0, t^{(2)}(\theta, \epsilon)]} \phi_s(\tau, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)), \\ \mathfrak{T}_\epsilon &:= \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} \cup \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

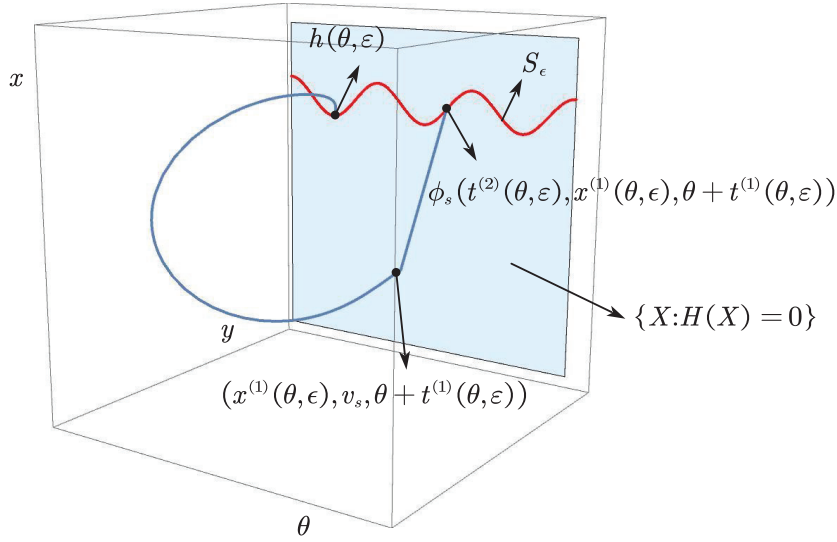


图 6-3 扩展相空间中标注的主要记号.

以下定理为本章主要结论

定理 6.2.1. 在假设 **H** 下, 存在常数 $\epsilon_0 > 0$ 使得当 $|\epsilon| < \epsilon_0$ 时, 相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 为 C^r 类的函数, 且有

$$\mathfrak{R}_\epsilon(\theta) = \theta + T_0 + g(\theta, \epsilon), \quad (\text{mod } T), \quad (6-5)$$

其中 T_0 为假设 **H** 中周期轨道的周期, $g(\theta, \epsilon) = O(\epsilon)$ 是 C^r 类的关于 θ 的周期 T 函数.

定理 6.2.2. 令 $\mathcal{O}$ 为假设 **H** 中周期轨道. 在假设 **H** 下, 当 ϵ 充分小时, 存在同胚 $I_\epsilon: \mathfrak{T}_\epsilon \rightarrow \mathcal{O} \times S^1$. 环面 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 是正向不变的, 且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时同胚 I_ϵ 趋近于恒同映射.

下面在数值上给出相位映射的一个直观展示. 以下参数取自文献 [38]:

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad c = 0.2, \quad v_s = 1, \\ A &= 10, \quad \alpha = 0.3, \quad \gamma = 3, \quad \lambda = 0.1, \quad \eta = 0.01. \end{aligned}$$

在本章中的数值计算中, 这些参数总是固定的. 图 6-4 给出了当 $\epsilon = 0$ 时系统 (6-1) 的一条滑移周期轨道. 当 $M(x, \theta, 0) = 0$, x 是一个不依赖于 θ 的常数. 此时我们有 $\mathfrak{R}_0(\theta) = \theta + T_0 (\text{mod } T)$. 令 $f(t) = \cos(\omega t)$, $\omega = 1.067$. 当 $\epsilon = 0, \epsilon = 0.2$ 时相位映射在扩展相空间中的示意图如图 6-5 所示. 数值上作出了当 $\epsilon = 0.2$ 时相位映射的图像, 见图 6-6.

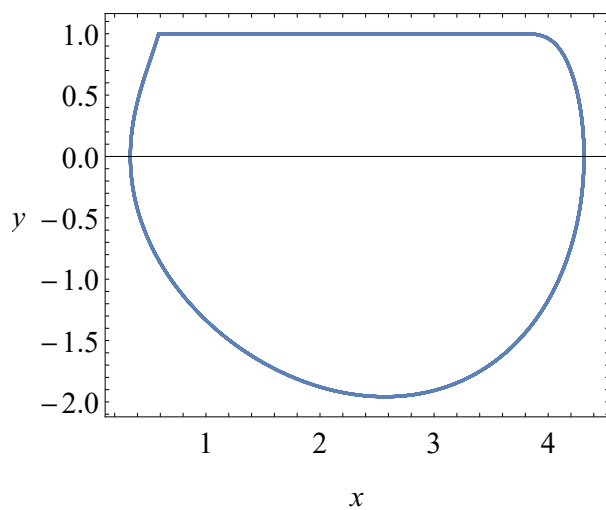


图 6-4 $\epsilon = 0$ 时系统 (6-1) 的滑移周期轨道.

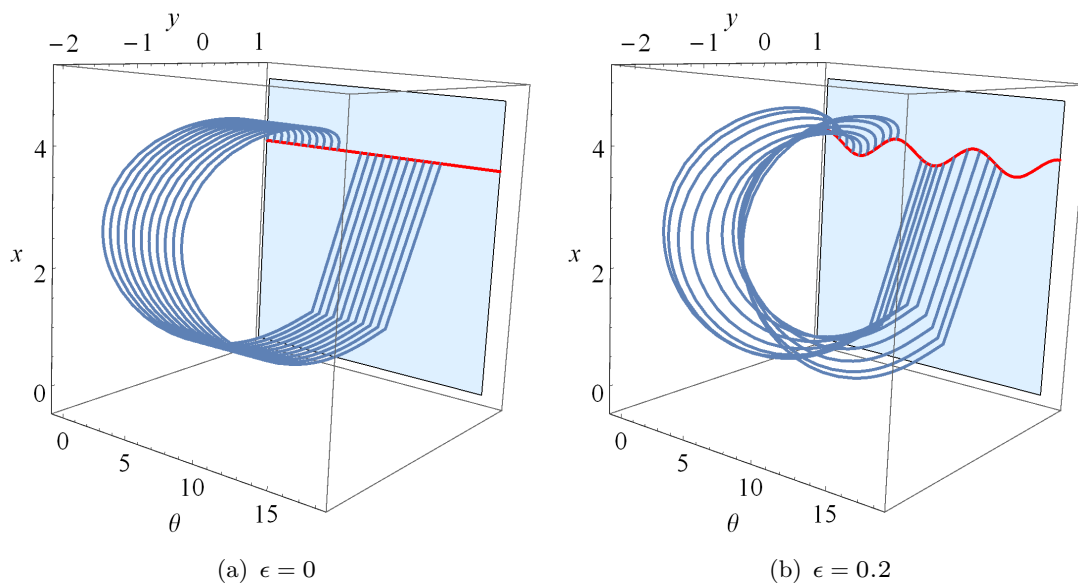


图 6-5 相位映射在扩展相空间中的示意图.

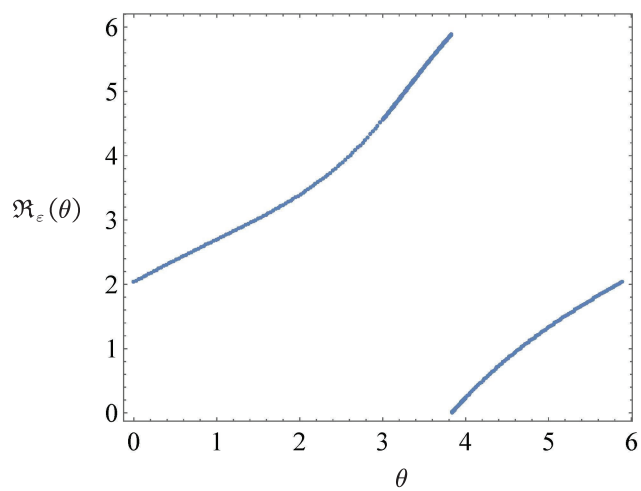


图 6-6 $\epsilon = 0.2$ 时相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的图像.

6.3 定理 6.2.1 与定理 6.2.2 的证明

沿用上一节所用到的记号.

定理 6.2.1 的证明. 取初值 $h(\theta, \epsilon)$ 即轨道从集合 S_ϵ 上的 θ 点出发. 由假设 **H**, 存在 $t_1 > 0$ 使得对任意的 $\theta \in S^1$ 都有

$$H(\phi(t_1, \frac{1}{k}(-cv_s + F_0), v_s, \theta, 0)) = 0,$$

即

$$H(\phi(t, h(\theta, \epsilon), \epsilon))|_{\epsilon=0, t=t_1} = 0.$$

并且, 由假设 **H** 以及条件 (6-4), 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H(\phi(t, h(\theta, \epsilon), \epsilon))|_{\epsilon=0, t=t_1} &= \langle \nabla H(\phi(t_1, h(\theta, 0), 0)), \frac{\partial}{\partial t} \phi(t_1, h(\theta, 0), 0) \rangle \\ &= -cv_s - kx_1 + F_0 \neq 0, \quad \forall \theta \in S^1. \end{aligned}$$

故根据隐函数定理, 存在常数 $\tilde{\epsilon}_0 > 0$ 及函数 $t^{(1)} : S^1 \times (-\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\epsilon}_0) \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对 $(\theta, \epsilon) \in S^1 \times (-\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\epsilon}_0)$, 有

$$t^{(1)}(\theta, 0) = t_1 \text{ 且 } H(\phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon), h(\theta, \epsilon), \epsilon)) = 0.$$

对 $\phi(t, h(\theta, \epsilon), \epsilon)$ 与 $\phi(t, h(\theta, 0), 0)$ 的距离, 利用解对初值的依赖性可得

$$\begin{aligned} \phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon), h(\theta, \epsilon), \epsilon) - \phi(t^{(1)}(\theta, 0), h(\theta, 0), 0) &= \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1, h(\theta, 0), 0) \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + o(\epsilon) \\ &+ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial X}(t_1, h(\theta, 0), 0) \frac{\partial h}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + o(\epsilon) + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}(t_1, h(\theta, 0), 0) + o(\epsilon). \quad (6-6) \end{aligned}$$

由式 (6-4), (6-6), 当 $|\epsilon|$ 充分小时有

$$0 < -kx^{(1)}(\theta, \epsilon) - cv_s + F_0 + \epsilon f(\theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) < 2F_0,$$

其中 $x^{(1)}(\theta, \epsilon)$ 是 $\phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon), h(\theta, \epsilon), \epsilon)$ 的第二个坐标, $x^{(1)}(\theta, 0) = x_1$. 因此, 轨线到达滑移面时无法穿过滑移面.

令 $\phi(t^{(1)}(\theta, 0), h(\theta, 0), 0) = (x_1, v_s, \theta_1)$. 注意到有 $\theta_1 = \theta + t^{(1)}(\theta, 0) = \theta + t_1 \pmod{2\pi}$

T). 取投射 $\Pi(x, y, \theta) = (x, \theta)$. 那么有

$$\Pi(\phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon), h(\theta, \epsilon), \epsilon)) = (x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)).$$

令 t_2 为满足下列条件的时间:

$$M(\phi_s(t_2, x_1, \theta_1), 0) = 0, \quad \forall \theta \in S^1,$$

即

$$M(\phi_s(t, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)), \epsilon)|_{t=t_2, \epsilon=0} = 0, \quad \forall \theta \in S^1.$$

由假设 **H**, 有

$$t_1 + t_2 = T_0 \text{ 且 } \phi_s(t_2, x^{(1)}(\theta, 0), \theta + t^{(1)}(\theta, 0)) = (\frac{1}{k}(-cv_s + F_0), \theta + T_0). \quad (6-7)$$

直接计算可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M(\phi_s(t, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)), \epsilon)|_{t=t_2, \epsilon=0} = \\ \frac{\partial M}{\partial X}(\frac{1}{k}(-cv_s + F_0), \theta + T_0, 0) \frac{\partial \phi_s}{\partial t}(t_2, x_1, \theta + t_1) = (-k, 0) \cdot (v_s, 1) = -kv_s \neq 0. \end{aligned}$$

因此根据隐函数定理, 存在常数 $\epsilon_0 > 0$ 及函数 $t^{(2)} : S^1 \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对 $(\theta, \epsilon) \in S^1 \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 有

$$M(\phi_s(t^{(2)}(\theta, \epsilon), x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)), \epsilon) = 0.$$

因此相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 对充分小的 $|\epsilon|$ 就定义好了, 且有

$$\mathfrak{R}_\epsilon(\theta) = \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon) + t^{(2)}(\theta, \epsilon).$$

根据隐函数定理, $t^{(1)}(\theta, \epsilon), t^{(2)}(\theta, \epsilon)$ 的光滑性与外激励 f 的光滑性一致, 且有

$$t^{(1)}(\theta, \epsilon) + t^{(2)}(\theta, \epsilon) = t_1 + t_2 + \epsilon \frac{\partial t^{(2)}}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + \epsilon \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + o(\epsilon).$$

令

$$g(\theta, \epsilon) = t^{(1)}(\theta, \epsilon) + t^{(2)}(\theta, \epsilon) - T_0 = \epsilon \frac{\partial t^{(2)}}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + \epsilon \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + o(\epsilon),$$

定理得证. $\square$

一般情况下, 滑移轨道的负向是不唯一的, 因此对滑移轨道只能定义正不变集. 我们已经说明相空间存在一个圆周使得当 $|\epsilon|$ 较小时, 其上的首次回归映射定义完好. 一个自然的问题是如何证明扩展相空间中正不变环面的存在性. 下面考虑这一问题. 曲面 $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}, \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ (见上一节中的定义) 都为柱面. 实际上, $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}, \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 可以参数化, 参数化映射 $P_\epsilon^{(1)} : S^1 \times [0, t^{(1)}(\theta, \epsilon)] \rightarrow \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}$ 自然地定义为

$$P_\epsilon^{(1)}(\theta, \tau) \rightarrow \phi(\tau, h(\theta, \epsilon), \epsilon).$$

可证明 $P_\epsilon^{(1)}$ 为一个同胚. 映射 $P_\epsilon^{(2)} : S^1 \times [0, t^{(2)}(\theta, \epsilon)] \rightarrow \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 也可以类似地定义. 因此, $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}, \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 都为扩展相空间中的柱面. 一个自然地想法是, 通过粘接这两个柱面得到一个环面. 首先, 我们需要如下粘接引理

引理 6.3.1. 令 X, Y 为度量空间, 且 $X = A \cup B, Y = C \cup D$, 其中 A 与 B, C 与 D 分别为空间 X, Y 的闭子集. 假设

$$A \cap B = \partial A = \partial B, C \cap D = \partial C = \partial D.$$

且存在同胚 $G_1 : A \rightarrow C, G_2 : B \rightarrow D$ 使得

$$G_1|_{\partial A} = G_2|_{\partial B}.$$

令映射 G 定义为

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x), & \text{如果 } x \in A \setminus \partial A, \\ G_2(x), & \text{如果 } x \in B \setminus \partial B, \\ G_1(x)(G_2(x)), & \text{如果 } x \in \partial A(\partial B). \end{cases}$$

则 $G : X \rightarrow Y$ 是一个同胚.

证明: 由假设, 映射 G 定义完好且其是双射. 由 G 的定义, 只需要证明 G 与 G^{-1} 分别在集合 A 以及 C 的边界上连续即可. 取 $x \in \partial A$. 由 G_1, G_2 的连续性, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在常数 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 使得当 $d_X(x, y_1) < \delta_1, d_X(x, y_2) < \delta_2$ 时

$$d_Y(G_1(x), G_1(y_1)) < \epsilon, d_Y(G_2(x), G_2(y_2)) < \epsilon,$$

其中 $y_1 \in A$, $y_2 \in B$, $d_X(\cdot, \cdot)$, $d_Y(\cdot, \cdot)$ 分别为度量空间 X, Y 的距离. 取 $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ 即可说明 G 在 ∂A 上是连续的. 类似地, 也可证明 G^{-1} 在 ∂C 上是连续的. 证毕. $\square$

我们还需要以下事实.

引理 6.3.2. 设函数 $g_1, g_2, m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都为连续函数, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $g_2(x) > g_1(x)$, 函数 m 严格单调递增. 那么所有由点 $(x, g_1(x))$, $(m(x), g_2(m(x)))$ 所连接的线段互不相交.

引理 6.3.3. 在曲线 $\{(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) : \theta \in S^1\}$ 与 $\{h(\theta, \epsilon) : \theta \in S^1\}$ 之间存在矢量场 $(v_s + O(\epsilon), 1 + O(\epsilon))$, 使得

$$\phi_{s,\epsilon}(t^{(2)}(\theta, \epsilon), x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) = h(\theta + T_0, \epsilon),$$

其中 $\phi_{s,\epsilon}$ 是矢量场 $(v_s + O(\epsilon), 1 + O(\epsilon))$ 的流. 且以下等式成立:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} &= \bigcup_{\theta \in S^1} \bigcup_{\tau \in [0, t^{(2)}(\theta, \epsilon)]} \phi_s(\tau, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) \\ &= \bigcup_{\theta \in S^1} \bigcup_{\tau \in [0, t^{(2)}(\theta, \epsilon)]} \phi_{s,\epsilon}(\tau, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)). \end{aligned} \quad (6-8)$$

证明: 为了在曲线 $\{(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) : \theta \in S^1\}$ 与 $\{h(\theta, \epsilon) : \theta \in S^1\}$ 之间定义矢量场, 用直线连接两点:

$$(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) \text{ 与 } h(\theta + T_0, \epsilon).$$

令

$$\bar{\theta}(\theta) = \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon) = \theta + t_1 + O(\epsilon).$$

将函数 $\bar{\theta}$ 的逆定义为 $\theta(\cdot)$. 注意到

$$x^{(1)}(\theta(\bar{\theta})) < \frac{1}{k}(-cv_s + F_0 + \epsilon f(\theta(\bar{\theta})))$$

且 $\theta(\bar{\theta}) + T_0$ 对于小的 $|\epsilon|$ 是严格递增的. 由引理 6.3.2, 由点 $(x^{(1)}(\theta(\bar{\theta}), \epsilon), \bar{\theta}), h(\theta(\bar{\theta}) +$

T_0, ϵ 连接的直线段互不相交. 对每个点 $(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon))$ 赋予矢量

$$\frac{1}{t^{(2)}(\theta, \epsilon)}(x^{(2)}(\theta + T_0, \epsilon) - x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + T_0 - (\theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon))) = (v_s + O(\epsilon), 1 + O(\epsilon)),$$

其中 $x^{(2)}(\theta + T_0, \epsilon)$ 为 $h(\theta + T_0, \epsilon)$ 的第二个坐标. 在点 $(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)), h(\theta + T_0, \epsilon)$ 连接的直线上, 赋予直线上的点与 $(x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon))$ 相同的矢量. 由于这些直线不相交, 这样的矢量场定义完好, 且有

$$\phi_{s, \epsilon}(t^{(2)}(\theta, \epsilon), x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) = h(\theta + T_0, \epsilon).$$

由于我们只改变了两条曲线之间直线的连接方式, 等式 (6-8) 成立. $\square$

定理 6.2.2 的证明. 由于相位映射定义完好, 集合 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 是正不变的. 下面说明同胚 I_ϵ 的存在性. 以如下方式定义映射 $I_\epsilon^{(1)} : \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} \rightarrow \mathfrak{T}_0^{(1)}$:

$$\phi(\tau, h(\theta, \epsilon), \epsilon) \rightarrow \phi\left(\frac{t_1}{t^{(1)}(\theta, \epsilon)}\tau, h(\theta, 0), 0\right), \tau \in [0, t^{(1)}(\theta, \epsilon)].$$

由于 $t^{(1)}(\theta, \epsilon)$ 接近于 t_1 , 而 t_1 非零, 故以上定义有意义. 由解对初值的可微性, 有

$$\begin{aligned} \phi(\tau, h(\theta, \epsilon), \epsilon) - \phi\left(\frac{t_1}{t^{(1)}(\theta, \epsilon)}\tau, h(\theta, 0), 0\right) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, h(\theta, 0))(\tau - \tau(1 + \epsilon \frac{1}{t_1} \frac{\partial t}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + o(\epsilon))) \\ &\quad + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial X}(\tau, h(\theta, 0), 0) \frac{\partial h}{\partial \epsilon}(\theta, 0) + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}(\tau, h(\theta, 0), 0) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

由于 $X = (x, y, \theta), \bar{X} = (x, \theta)$, 及 $\tau \in [0, t^{(1)}(\theta, \epsilon)]$ 是有界的, 我们有 $I_\epsilon^{(1)}(X) = X + O(\epsilon)$, 故 $I_\epsilon^{(1)}$ 为一个同胚. 令 $I_\epsilon^{(2)} : \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} \rightarrow \mathfrak{T}_0^{(2)}$ 定义为

$$\phi_{s, \epsilon}(\tau, x^{(1)}(\theta, \epsilon), \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) \rightarrow \phi_s\left(\frac{t_2}{t^{(2)}(\theta, \epsilon)}\tau, x^{(1)}(\theta, 0), \theta + t^{(1)}(\theta, 0)\right), \tau \in [0, t^{(2)}(\theta, \epsilon)],$$

其中 $\phi_{s, \epsilon}$ 是引理 6.3.3 中矢量场的流. 类似地, 可证明 $I_\epsilon^{(2)}(\bar{X}) = \bar{X} + O(\epsilon)$.

由集合 $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}, \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 的定义, 我们有

$$\partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} = \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}, \partial \mathfrak{T}_0^{(1)} = \partial \mathfrak{T}_0^{(2)}.$$

并且, $I_\epsilon^{(1)}, I_\epsilon^{(2)}$ 在边界 $\partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} = \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 是等同的. 实际上, 由 $I_\epsilon^{(1)}, I_\epsilon^{(2)}$ 的定义以及引理

6.3.3, 我们有

$$\begin{aligned} I_\epsilon^{(1)}(h(\theta, \epsilon)) &= h(\theta, 0), \quad I_\epsilon^{(1)}(x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) = (x_1, v_s, \theta + t_1), \\ I_\epsilon^{(2)}(h(\theta + T_0, \epsilon)) &= h(\theta + T_0, 0), \quad I_\epsilon^{(2)}(x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) = (x_1, v_s, \theta + t_1). \end{aligned}$$

因此, 根据引理 6.3.1, 由以下给出的映射 $I_\epsilon : \mathfrak{T}_\epsilon \rightarrow \mathfrak{T}_0$

$$I_\epsilon(X) = \begin{cases} I_\epsilon^{(1)}(X), & \text{如果 } X \in \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} \setminus \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} \\ I_\epsilon^{(2)}(X), & \text{如果 } X \in \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} \setminus \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} \\ I_\epsilon^{(1)}(X) = I_\epsilon^{(2)}(X), & \text{如果 } X \in \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)} = \partial \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)} \end{cases}$$

是一个同胚. 由 $I_\epsilon^{(1)}, I_\epsilon^{(2)}$ 的定义, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 I_ϵ 趋近于一个恒同映射. $\square$

6.4 正不变环面上的动力学

本节讨论环面 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 上的动力学. 本节所用到的主要为保向圆周同胚理论, 可参见 [105, 112]. 当 $|\epsilon|$ 较小时, 若相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的旋转数是有理数, 则映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的 (p, q) 周期轨道的存在性意味着原系统 (6-2) 次谐波周期轨道的存在性. 如果 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的旋转数是无理数, 这里假设外激励的光滑阶数 $r \geq 2$, 那么由 Donjoy 定理^[112], $\mathfrak{R}_\epsilon$ 拓扑共轭与一个无理平移. 下面我们说明在这种情况下, 系统 (6-2) 的轨道在 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 上处处稠密.

引理 6.4.1. 当 $|\epsilon|$ 充分小, 流限制在环面 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 是完全的且其对初值具有连续依赖性.

证明: 将在 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 上的流记为 $\Phi(t, X, \epsilon)$. 由 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 的定义以及相位映射是定义完好的首次回归映射, 正向流是定义完好的. 我们可以取映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的逆使得负向流也是定义完好的. 若 $X \in \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}$ 且有 $X = \phi(\tau, h(\theta, \epsilon), \epsilon)$, 则负向流可定义如下:

$$\begin{aligned} \Phi(-t, X, \epsilon) &= \phi(\tau - t, h(\theta, \epsilon), \epsilon) \quad \text{当 } 0 \leq t \leq \tau; \\ \Phi(-t, X, \epsilon) &= \phi_s(t^{(2)}(\theta, \epsilon) - t + \tau, \Pi(\phi(t^{(1)}(\mathfrak{R}_\epsilon^{-1}(\theta), \epsilon), h(\mathfrak{R}_\epsilon^{-1}(\theta), \epsilon), \epsilon))) \\ &\quad \text{当 } \tau < t \leq t^{(2)}(\theta, \epsilon) + \tau; \\ \Phi(-t, X, \epsilon) &= \phi(t^{(1)}(\theta, \epsilon) + \tau + t^{(2)}(\theta, \epsilon) - t, h(\mathfrak{R}_\epsilon^{-1}(\theta), \epsilon), \epsilon) \\ &\quad \text{当 } t^{(2)}(\theta, \epsilon) + \tau < t \leq t^{(2)}(\theta, \epsilon) + \tau + t^{(1)}(\theta, \epsilon); \\ &\vdots \end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 是同胚, $\Phi(-t, X, \epsilon)$ 的定义是唯一的. 类似地, 也可定义 $X \in \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 的负向流.

由于在 $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}, \mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 上矢量场都是光滑的, 且轨线到达边界时总是横截地穿过去, 流对初值具有连续依赖性. $\square$

命题 6.4.1. 在假设 **H** 下, 若 $|\epsilon|$ 充分小且 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 拓扑共轭与一个无理平移, 那么系统 (6-2) 的所有轨道在环面 $\mathfrak{T}_\epsilon$ 上都是稠密的.

证明: 假设不成立. 那么存在一个开集 U 以及一条轨道 γ 使得 γ 与 U 的交集为空. 不失一般性, 假设 $U \subset \mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}$. 取 U 中一点 X^* . 令 $\delta > 0$ 为 X^* 点处一个开球的半径, 此开球在 U 中. 由集合 $\mathfrak{T}_\epsilon^{(1)}$ 的定义, 存在 $X \in S_\epsilon, t$ 使得点 X 经过时间 t 后到达 X^* . 由假设, γ 与集合 S_ϵ 有稠密的交点. 故根据解对初值的连续依赖性, 可取 γ 与 S_ϵ 的一个交点 X_1 , X 与 X_1 的距离充分小使得从点 X, X_1 出发的解在还未到达 $\mathfrak{T}_\epsilon^{(2)}$ 时, 其距离总小于 δ . 这与 $\gamma \cap U = \emptyset$ 矛盾. $\square$

虽然已经得到了相位映射的一些定性信息, 但实际上很难去判断一个圆周平移的小扰动的旋转数到底是无理数还是有理数. 然而, 基于 KAM 理论中的圆周映射定理, 可从直觉上得到一些定性信息. 为此, 我们来探究外激励的频率对不变环面上动力学的影响. 由于频率变化时圆周 S_ϵ 的周期也是变化的, 首先固定圆周的周期. 不妨设 $f(t) = m(\omega t)$, 其中 ω 为参数, m 是一个 C^r 类的周期函数, 其周期为 2π . 此时 f 的周期为 $2\pi/\omega$. 令

$$\mathfrak{R}_{\epsilon, \omega}(\theta) = \omega \mathfrak{R}_\epsilon\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = \theta + \omega T_0 + \omega g\left(\frac{\theta}{\omega}, \epsilon\right), \text{ mod } 2\pi. \quad (6-9)$$

可以看到, 当 ϵ 固定, 外激励的频率对圆周映射的扰动是有影响的. 以下的定理^[5], 可以说明, 当 ω 在某个固定的区间 $[\omega_0, \omega_1]$, 而 ϵ 较小且 f 足够光滑, 则对此区间上大部分的频率, 相位映射光滑共轭于一个无理平移.

定理 6.4.1. 对充分光滑的映射

$$g(\theta) = \theta + a + \delta \alpha(\theta, \delta), \text{ mod } 2\pi,$$

g 不能光滑共轭于一个无理平移的参数 (a, δ) 在 $[0, 2\pi] \times [0, \delta_0]$ 的测度随着 $\delta_0 \rightarrow 0$ 而趋于 0, 其中 $\alpha(\theta, \delta)$ 是一个充分光滑的函数, α 关于 θ 是 2π 周期的.

6.5 共振, 魔鬼阶梯及环面的破坏

本节用数值方法研究系统 (6-2) 的动力学.

由定理 6.2.1 中的公式 (6-5) 以及 (6-9), 当 f 的频率变化时, 可以预测到系统 (6-2) 应该会有典型的共振现象, 例如魔鬼阶梯. 下面来验证这一个预测. 由上一节最后的讨论, 参数 ϵ 应选择得不太小, 而频率的变化范围也不应过大. 固定 $\epsilon = 0.35$. 令 $f = \cos(\omega t)$ 令映射 $\mathfrak{R}_{\epsilon, \omega}$ 的旋转数为 $\rho(\omega)$. 当 $\omega \in [2, 2.8]$ 时 ρ 的图像在图 6-7 展示. 可看到图 6-7 中的数值结果与理论预期吻合.

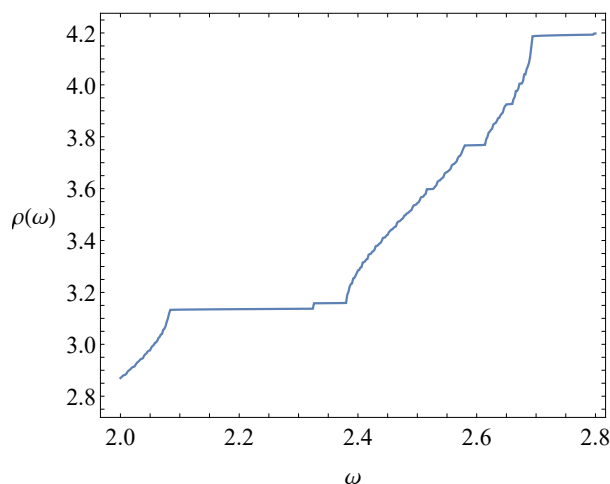


图 6-7 当 $\epsilon = 0.35, \omega \in [2, 2.8]$ 时旋转数 $\rho(\omega)$ 的图像.

根据定理 6.2.2, 当 $|\epsilon|$ 充分小时, 系统 (6-2) 存在一个正不变环面. 数值实验表明, 当扰动过大时此环面的破坏与光滑系统中的环面破坏有不同之处. 当扰动增大时, 环面首先失去了与滑移面的横截性. 一些从 $h(\theta, \epsilon)$ 出发的轨道仍然与滑移面有横截的交点, 但存在与滑移面在集合 S_ϵ 处擦切的轨线, 在擦切轨线附近, 某些轨道需要在区域 $\{X : H < 0\}$ 花费更久的时间才能到达滑移面. 此时相位映射仍然是有定义的, 因为所有从 S_ϵ 出发的轨道仍然是回归的. 但相位映射不再连续, 相空间中存在的正不变的曲面也不再是环面. 这种情况下系统的动力学取决于这个不连续的圆周映射的动力学状态.

令 ϵ 为控制参数, $f = \cos(\omega t)$, 其中 $\omega = 1.067$ 固定. 当 $0 \leq \epsilon \leq 0.5$, 相位映射仍然是一个保向圆周同胚, 见图 6-8. 我们利用柱坐标: $X_1 = (x + 2) \cos(\omega \theta)$, $Y_1 = (x + 2) \sin(\omega \theta)$, $Z_1 = y$, 给出了相空间中的环面, 见图 6-9.

相位映射的分岔图在图 6-10 展示. 可看到当 $\epsilon \approx 0.514$ 时, 环面破坏. 当 $\epsilon \in [0.57, 0.585]$, 系统存在周期倍化与反倍化现象^[55].

为了研究当 ϵ 变化时轨线的擦切情况, 可数值上观察集合

$$\{(x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) : \theta \in S^1\}$$

的性态, 此集合即为轨线从 $h(\theta, \epsilon)$ 出发第一次到达滑移面 $\{X : H(X) = 0\}$ 上的点. 当 ϵ 较小时, 实际上在引理 6.3.3 中我们已说明了集合 $\{(x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) : \theta \in S^1\}$ 是 S^1 上的一个光滑函数的图像. 当 $\epsilon = 0.51403518$, 此集合虽然仍是一条曲线但不再是 S^1 上的一个光滑函数的图像. 并且其存在一个尖点, 此尖点即代表了一条擦切轨道, 见图 6-11 (a). 当 $\epsilon = 0.52$, 此集合不再是一条光滑曲线, 见图 6-11 (b). 该集合与 S_ϵ 的两个交点即为两条擦切轨道. 可以预见, 擦切轨道是扰动不掉的. 相位映射此时不再连续, 见图 6-12. 我们作出了一条擦切轨道, 见图 6-13.

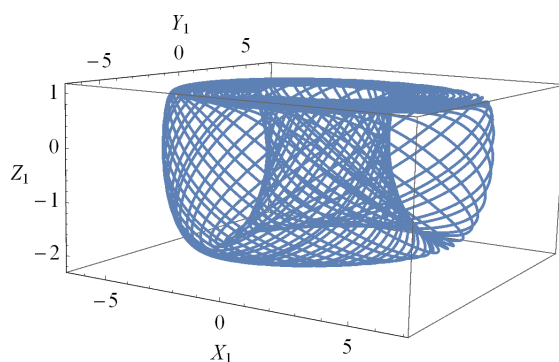
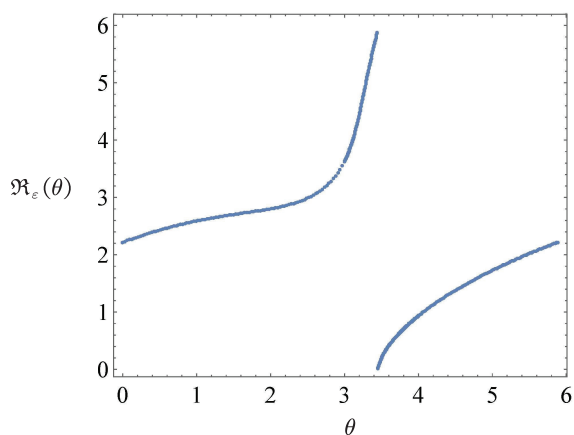


图 6-8 $\epsilon = 0.5$ 时相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的图像. 图 6-9 $\epsilon = 0.2$ 时柱坐标下的不变环面.

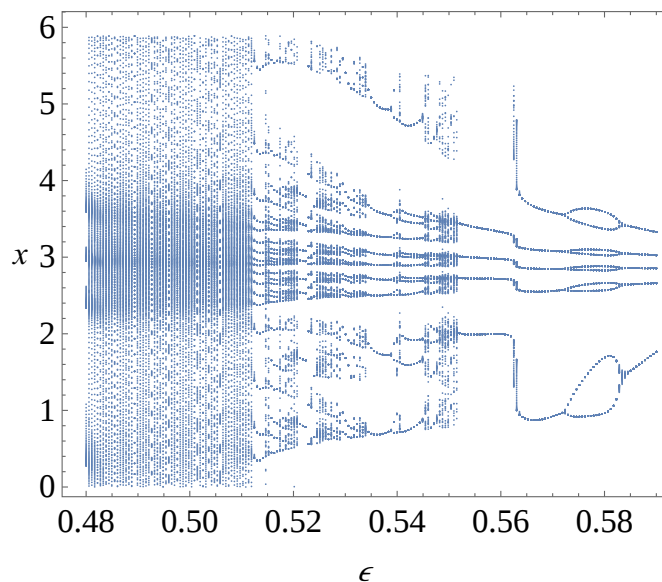


图 6-10 $\epsilon \in [0.48, 0.59]$ 时相位映射的分岔图.

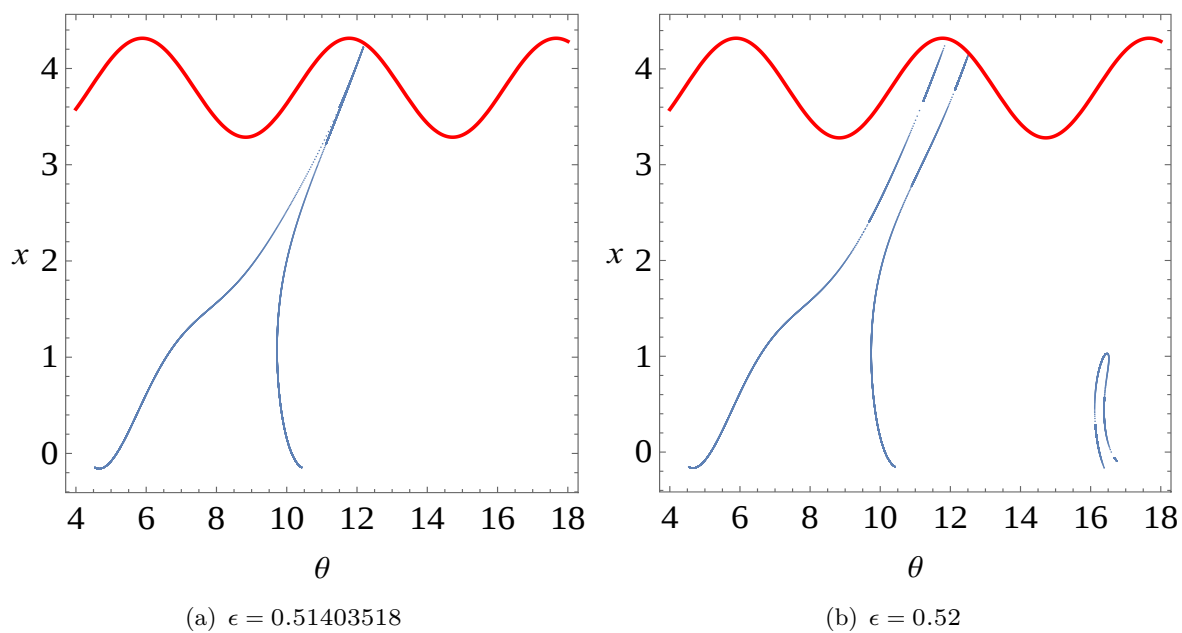


图 6-11 $\epsilon = 0.51403518, 0.52$ 时集合 $\{(x^{(1)}(\theta, \epsilon), v_s, \theta + t^{(1)}(\theta, \epsilon)) : \theta \in S^1\}$ 与 S_ϵ 的图像.

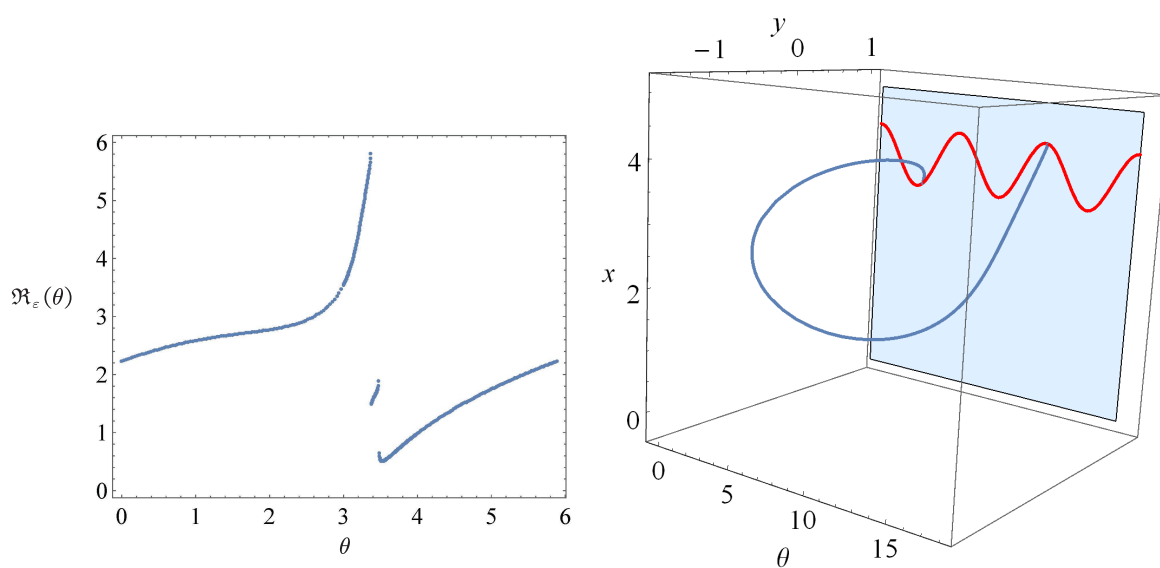


图 6-12 $\epsilon = 0.52$ 时相位映射 $\mathfrak{R}_\epsilon$ 的图像. 图 6-13 从点 $h(3.37317889, 0.52)$ 出发的擦切轨道.

6.6 本章小结

本章研究了一类带有干摩擦力的单自由度强迫振动系统. 首先给出了早期文献中出现的相位映射的一个严格定义, 其为一个一维截面的首次回归映射; 而在无外激励时存在滑移周期轨道的假设下, 说明了当具有小激励扰动时相位映射定义完好, 且其为一个光滑的圆周平移的扰动; 运用了拓扑的方法证明了相空间中正不变环面的存在性, 并利用圆周映射的分类定理以及 KAM 理论详细地讨论了正不变环面上的动力学; 在数值上验证了圆周映射所出现的典型的魔鬼阶梯现象, 并发现了当外激励扰动过大时, 系统正不变环面的破坏是由于擦切轨道的存在性.

总结和展望

本文主要研究了两类碰撞 Hamilton 系统与一类带有干摩擦力的强迫振动系统的不变环面的存在性及其破坏机理, 对已取得的结果以及后续可能的拓展总结如下:

本文在第三章研究了双面碰撞倒摆的全局动力学. 运用 KAM 理论证明了系统在低速以及高速区域具有近可积性质的动力学. 在本章还设计了带有碰撞效应的不变流形的计算方法, 并在数值上展示了鞍点的不变流形在扰动下的缠结性态. 数值上观察到, 当扰动增大时, 不变曲线在低速区域的破坏是由于鞍点不变流形的大范围缠结. 此数值方法与碰撞系统中的 Melnikov 方法有紧密联系. 另外当研究不变流形与碰撞面擦切时, 此方法也可作为验证理论的数值工具. 这些方面仍需要进一步的拓展.

第四章与第五章对呼吸圆台球在不同光滑性条件下的动力学进行了详细的分析. 当系统具有 C^7 类的光滑性时, 利用 KAM 理论证明了无穷远处不变环面的存在性. 为说明这一光滑性假设是必需的, 本章还证明了当系统的光滑性仅为分段光滑时逃逸轨道的存在性. 呼吸圆台球的碰撞映射为一类具有小扭转性质的扭转映射, 利用变分方法, 证明了系统在高速区域 Aubry-Mather 集的存在性. 但上述结果仍有待扩展与延伸. 由于使用了导致系统光滑性降低的“停止墙壁”变换, 该系统 KAM 理论的应用需要 C^7 的光滑性. 但根据以往的文献以及碰撞映射的光滑性, 最优的结果应在 C^r ($r > 4$) 类光滑性, 如何得到这一最优结果仍值得更细致地探讨. 本章在分段光滑的条件下证明了逃逸轨道的存在性, 但 C^1 情况下逃逸轨道的存在性以及其测度仍是未知的, 目前的文献也鲜有这方面的结果. 除了这些可能的延伸, 该系统的扩展更值得关注: 即边界运动时不再为一簇同心圆. 此时质点在碰撞时角动量不再守恒, 因此 Poincaré 映射是四维的扭转映射. 目前已对这类系统作了初步的探索, 如在数值上, 当边界运动的幅度较小时, 不变环面仍存在, 并且此系统仍然符合 Aubry-Mather 理论的框架. 但由于系统的维数升高两维, 处理呼吸圆台球所用到的方法几乎全部失效, 这方面的理论工作还需要进一步探索.

第六章研究了一类带有干摩擦的强迫振动系统在滑移周期轨道附近的动力学. 首先给出了相位映射数学定义, 并利用滑移周期轨道的横截性条件证明了相位映射是一个光滑的保向圆周同胚. 而后运用拓扑的粘合技术证明了系统正向不变环面的存在性. 基于圆周映射理论以及 KAM 理论对环面上的动力学作了定性的划分. 在数值上验证了理论分析的结果, 并且发现, 此类系统擦切轨道的存在性会导致环面破裂. 然而, 这种发现仅仅基于数值, 如何在理论上分析环面的破坏机理值得深入探索.

致 谢

我于 2016 年来到西南交大, 师从谢老师学习非线性动力学, 在这将近六年的时间里, 我的收获要远多于我的付出. 首先感谢我的导师谢建华教授. 自我入学以来, 谢老师就在学习内容上给予了我很大的自由, 并鼓励我做自己感兴趣的课题. 谢老师主持的非线性动力学讨论班为我提供了开阔自由的学术交流环境. 本文的选题与内容也得到了谢老师悉心的指导, 谢老师更是逐句地修改了本文的所有内容. 更重要地, 谢老师在学术上的严谨治学和为人上的谦逊平和值得我永远学习.

感谢李登辉师兄六年来对我学术上的帮助. 李师兄在学位论文的内容选择上给予了我许多宝贵的建议, 更曾细心地修改我的投稿论文. 感谢曹振邦师兄对我选题的指引, 让我没有在众多方向中没有迷失太久.

感谢讨论班成员陈和柏师兄, 高峰师兄, 杨娟师姐, 缪鹏程师兄, 秦琅师兄, 樊智辉师兄, 博士生李高磊, 刘润师弟, 吴鑫师弟, 曾超师弟, 李冠强师弟, 张文师弟, 曾青师妹, 赵文浩师弟, 侯林森师弟, 张凯旋师弟, 贺尔星师弟, 何智超师弟, 张瑜师妹, 安金凯师弟, 与他们的学术交流总是愉快的. 特别感谢曾超师弟为我提供了本文的 L^AT_EX 模板. 感谢乐源老师, 李映辉老师, 湖南大学博士生邓书凝以及殷珊师兄一直以来的关心与帮助.

感谢我的家人一直以来对我学业的支持与理解. 他们始终以我的学业为重, 为我承受了许多我感受不到的负担. 最后, 感谢求学以来所有关心帮助过我的朋友.

参考文献

- [1] J. M. Alonso and R. Ortega. Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator. *Journal of Differential Equations*, 143:201–220, 1998.
- [2] V. I. Arnold. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 25:21–86, 1961.
- [3] V. I. Arnold. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations. *Russian Mathematical Surveys*, 18(5):9–36, 1963.
- [4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, NewYork, 1978.
- [5] V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, NewYork, 1983.
- [6] V. I. Arnold. 常微分方程绪论: 常微分方程的几何方法. 齐民友译. 科学出版社, 北京, 1989.
- [7] S. Aubry and P.Y. LeDaeron. The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions: I. Exact results for the ground-states. *Physica D*, 8(3):381–422, 1983.
- [8] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. *Dynamics Reported*, 1:1–56, 1988.
- [9] V. Benci and F. Giannoni. Periodic bounce trajectories with a low number of bounce points. *Annales de l' Institut Henri Poincaré Annales Non Linéaire*, 6(1):73–93, 1989.
- [10] P. Boyland. Dual billiards, twist maps and impact oscillators. *Nonlinearity*, 9(6):1411, 1996.
- [11] P. Boyland and R. G. Hall. Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps. *Topology*, 26(1):21–35, 1987.

-
- [12] C. Bonanno and S. Marò. Chaotic motion in the breathing circle billiard. *Annales Henri Poincaré*, <https://doi.org/10.1007/s00023-021-01090-9>, 2021.
- [13] H. W. Broer and M. B. Sevryuk. KAM Theory: quasi-periodicity in dynamical systems. *Handbook of Dynamical Systems*, 3(C):249–344, 2010.
- [14] M. Brown and W. D. Neumann. Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Michigan Mathematical Journal*, 24(1):21–31, 1977.
- [15] G. F. Burgio, M. Baldo, A. Rapisarda, and P. Schuck. Chaoticity in Vibrating Nuclear Billiards. *Physical Review C*, 52:2475–2479, 1995.
- [16] Z. B. Cao, C. Grebogi, D. H. Li, and J. H. Xie. The existence of Aubry-Mather sets for the Fermi-Ulam model. *Qualitative Theory of Differential Equations*, 20:1–12, 2021.
- [17] A. Celletti and L. Chierchia. Quasi-periodic attractors in celestial mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 191(2):311–345, 2009.
- [18] A. Celletti and S. di Ruzza. Periodic and quasi-periodic orbits of the dissipative standard map. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 16(1):151–171, 2011.
- [19] J. Cheng. Variational approach to homoclinic orbits in twist maps and an application to billiard systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 55(3):400–419, 2004.
- [20] S. N. Chow and J. K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer, New York, 1982.
- [21] S. N. Chow and S. W. Shaw. Bifurcations of subharmonics. *Journal of Differential Equations*, 65(3):304–320, 1986.
- [22] M. C. Ciocci, A. Litvak-Hinenzon, and H. W. Broer. Survey on dissipative KAM theory including quasi-periodic bifurcation theory. *Geometric Mechanics and Symmetry: the Peyresq Lectures*, 306:303–355, 2005.
- [23] R. de la Llave. A tutorial on KAM theory. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 69:175–296, 2001.
-

-
- [24] J. de Simoi and D. Dolgopyat. Dynamics of some piecewise smooth Fermi-Ulam models. *Chaos*, 22(2):486–488, 2012.
- [25] C. P. Dettmann, V. Fain, and D. Turaev. Splitting of separatrices, scattering maps, and energy growth for a billiard inside a time-dependent symmetric domain close to an ellipse. *Nonlinearity*, 31(3):667–770, 2018.
- [26] L. Dieci and L. Lopez. Fundamental matrix solutions of piecewise smooth differential systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(5):932–953, 2011.
- [27] R. Dieckerhoff and E. Zehnder. Boundedness of solutions via the twist-theorem. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 14(1):79–95, 1987.
- [28] W. C. Ding and J. H. Xie. Torus $\mathbb{T}^2$ and its routes to chaos of a vibro-impact system. *Physica Review Letter A*, 349:324–330, 2006.
- [29] D. Dolgopyat and B. Fayad. Unbounded orbits for semicircular outer billiard. *Annales Henri Poincaré*, 10(2):357–375, 2009.
- [30] D. Dolgopyat. *Lectures on Bouncing Balls*, lecture notes for a course in Murcia, 2013; available at <http://www2.math.umd.edu/~dolgop/BBNotes.pdf>
- [31] Z. D. Du, Y. R. Li, J. Shen and W. N. Zhang. Impact oscillators with homoclinic orbit tangent to the wall. *Physica D*, 245(1):19–33, 2013.
- [32] Z. D. Du and W. N. Zhang. Melnikov method for homoclinic bifurcation in nonlinear impact oscillators. *Computers and Mathematics with Applications*, 50:445–458, 2005.
- [33] E. Fermi. Galactic magnetic fields and the origin of the cosmic radiation. *Astrophysical Journal*, 119:1–6, 1954.
- [34] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
- [35] G. Forni. Construction of invariant measures supported within the gaps of Aubry-Mather sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 16(1):51–86, 1996.
-

-
- [36] U. Galvanetto and C. Knudsen. Events maps in a stick-slip system. *Nonlinear Dynamics*, 13(2):99-115, 1997.
- [37] U. Galvanetto. Non-linear dynamics of multiple friction oscillators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178:291–306, 1999.
- [38] U. Galvanetto. Computation of the separatrix of basins of attraction in a non-smooth dynamical system. *Physica D*, 237(18):2263-2271, 2008.
- [39] J. M. Gao and Z. D. Du. Homoclinic bifurcation in a quasiperiodically excited impact inverted pendulum. *Nonlinear Dynamics*, 79(2):1061–1074, 2015.
- [40] V. Gelfreich and D. Turaev. Unbounded energy growth in Hamiltonian systems with a slowly varying parameter. *Communications in Mathematical Physics*, 283(3):769–794, 2008.
- [41] C. Golé. *Symplectic Twist Maps: Global Variational Techniques*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [42] A. Granados, S. J. Hogan and T. M. Seara. The Melnikov method and subharmonic orbits in a piecewise smooth system. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(3):801-803, 2012.
- [43] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Second Edition, Robert E. Krieger, New York, 1980.
- [44] M. R. Herman. *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*. I, Volume 103 of Astérisque. Société Mathématique de France, Paris, 1983.
- [45] D. Hobson. An efficient method for computing invariant manifolds of planar maps. *Journal of Computational Physics*, 104(1):14–22, 1993.
- [46] A. P. Ivanov and A. P. Markeev. The dynamics of systems with unilateral constraints. *Journal of Applied Mathematics & Mechanics*, 48:448-451, 1984.
- [47] 蒋美跃, 裴明亮. 扭转映射的 Aubry-Mather 理论及其应用. *数学进展*, 23(2):97–114, 1994.
- [48] P. Jürgen. A lecture on the classical KAM theorem. *Mathematics*, 69:707–732, 2009.
-

-
- [49] S. O. Kamphorst and S. P. de Carvalho. Bounded gain of energy on the breathing circle billiard. *Nonlinearity*, 12(5):1363–1371, 1999.
- [50] A. N. Kolmogorov. On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton’s function. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 98:527–530, 1954.
- [51] T. Kousaka, H. Asahara, and N. Inaba. Stick-slip chaos in a mechanical oscillator with dry friction. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 033A01, 2018.
- [52] T. Kroetz, H. A. Oliveira, J. S. E. Portela, and R. L. Viana. Dynamical properties of the soft-wall elliptical billiard. *Physical Review E*, 94:022218-1-9, 2016.
- [53] M. Kunze, T. Küpper, and B. Liu. Boundedness and unboundedness of solutions for reversible oscillators at resonance. *Nonlinearity*, 14(5):1105–1122, 2001.
- [54] M. Kunze, T. Küpper, and J. You. On the application of KAM theory to discontinuous dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 139(1):1–21, 1997.
- [55] M. Kunze and T. Küpper. Qualitative bifurcation analysis of a non-smooth friction-oscillator model. *Ztschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik Zamp*, 48(1):87–101, 1997.
- [56] M. Kunze and R. Ortega. Complete orbits for twist maps on the plane. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28(4):1197–1213, 2008.
- [57] M. Kunze and R. Ortega. Complete orbits for twist maps on the plane: extensions and applications. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 23(3):405–423, 2011.
- [58] M. Kunze and R. Ortega. Complete orbits for twist maps on the plane: the case of small twist. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 31(5):1471–1498, 2011.
- [59] S. Laederich and M. Levi. Invariant curves and time-dependent potentials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11(2):365–378, 1991.
- [60] V. F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 7(1):186–216, 1973.
-

-
- [61] R. I. Leine and H. Nijmeijer. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*. Springer, Berlin, 2013.
- [62] E. D. Leonel and L. A. Bunimovich. Suppressing Fermi acceleration in a driven elliptical billiard. *Physical Review Letters*, 104:224101-1-4, 2010.
- [63] M. Levi. KAM theory for particles in periodic potentials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(4):777–785, 1990.
- [64] M. Levi. Quasiperiodic motions in superquadratic time-periodic potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 143(1):43–83, 1991.
- [65] M. Levi and J. Moser. A Lagrangian proof of the invariant curve theorem for twist mappings. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 69:733–748, 2001.
- [66] J. E. Littlewood. Unbounded solutions of an equation $\ddot{y} + g(y) = p(t)$, with $p(t)$ periodic and bounded, and $g(y)/y \rightarrow \infty$ as $y \rightarrow \infty$. *Journal of the London Mathematical Society*, 41:497–507, 1966.
- [67] B. Liu. Boundedness in nonlinear oscillations at resonance. *Journal of Differential Equations*, 153:142–174, 1999.
- [68] S. Marò. Coexistence of bounded and unbounded motions in a bouncing ball model. *Nonlinearity*, 26(5):1439–1448, 2013.
- [69] S. Marò. A mechanical counterexample to KAM theory with low regularity. *Physica D*, 283:10–14, 2014.
- [70] S. Marò. Relativistic pendulum and invariant curves. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 35(3):1139–1162, 2014.
- [71] S. Marò. Chaotic dynamics in an impact problem. *Annales Henri Poincaré*, 16(7):1633–1650, 2015.
- [72] J. Mawhin. Global results for the forced pendulum equation. *Handbook of Differential Equations*, 1:533–589, 2004.
- [73] J. N. Mather. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. *Topology*, 21(4):457–467, 1982.
-

-
- [74] J. N. Mather. Glancing billiards. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2:397–403, 1982.
- [75] J. N. Mather. Non-existence of invariant circles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(2):301–309, 1984.
- [76] J. N. Mather. A criterion for the non-existence of invariant circles. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 63:153–204, 1986.
- [77] J. N. Mather. Destruction of invariant circles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8:199–214, 1988.
- [78] J. N. Mather. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. *Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, 92–186, 1994.
- [79] G. R. Morris. A case of boundedness in Littlewood’s problem on oscillatory differential equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 14(1):71–93, 1976.
- [80] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, 1–20, 1962.
- [81] J. Moser. Combination tones for Duffing’s equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18:167–181, 1965.
- [82] J. Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, New Jersey, 1973.
- [83] J. Moser. Monotone twist mappings and the calculus of variations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6(3):401–413, 1986.
- [84] J. Moser. *Selected Chapters in the Calculus of Variations*. Springer Science & Business Media, Basel, 2003.
- [85] J. R. Munkres. 拓扑学. 熊金城, 吕杰, 谭枫译. 机械工业出版社, 2004.
- [86] A. B. Nordmark and P. Kowalczyk. A codimension-two scenario of sliding solutions in grazing-sliding bifurcations. *Nonlinearity*, 19:1–26, 2005.
-

-
- [87] M. Oestreich, N. Hinrichs, and K. Popp. Bifurcation and stability analysis for a non-smooth friction oscillator. *Archive of Applied Mechanics*, 66(5):301–314, 1996.
- [88] R. Ortega. Asymmetric oscillators and twist mappings. *Journal of the London Mathematical Society*, 53(2):325–342, 1996.
- [89] R. Ortega. Boundedness in a piecewise linear oscillator and a variant of the small twist theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 79(2):381–413, 1999.
- [90] R. Ortega. Dynamics of a forced oscillator having an obstacle. *Variational and Topological Methods in the Study of Nonlinear Phenomena*, 75–87, 2002.
- [91] D. Pikunov, and A. Stefanski. Numerical analysis of the friction-induced oscillator of Duffing’s type with modified LuGre friction model. *Journal of Sound and Vibration*, 440:23–33, 2019.
- [92] A. Rapoport, V. Rom-Kedar, and D. Turaev. Approximating multi-dimensional Hamiltonian flows by billiards. *Communications in Mathematical Physics*, 272(3):567–600, 2007.
- [93] V. Rom-Kedar and D. Turaev. Big islands in dispersing billiard-like potentials. *Physica D*, 130:187–210, 1999.
- [94] H. Rüssmann. *Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes*. Vandenhoeck & Ruprecht, 67–105, 1970.
- [95] D. Salamon. The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem. *Mathematical Physics Electronic Journal*, 10(3):1–37, 2004.
- [96] S. W. Shaw and H. R. Rand. The transition to chaos in a simple mechanical system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 24(1):41–56, 1989.
- [97] C. L. Siegel. Iteration of analytic functions. *Annals of Mathematics*, 43(2):607–612, 1942.
- [98] M. B. Tabanov. Separatrices splitting for Birkhoff’s billiard in symmetric convex domain, closed to an ellipse. *Chaos*, 4(4):595–606, 1994.
-

-
- [99] F. Takens. A C^1 counterexample to Moser's twist theorem. *Indagationes Mathematicae*, 74:379–386, 1971.
- [100] P. Thota and H. Dankowicz. Analysis of grazing bifurcations of quasiperiodic system attractors. *Physica D*, 220:163–174, 2006.
- [101] P. Thota and H. Dankowicz. Continuous and discontinuous grazing bifurcations in impacting oscillators. *Physica D*, 214:187–197, 2006.
- [102] R. L. Tian, T. Wang, Y. F. Zhou, J. Li and S. T. Zhu. Heteroclinic chaotic threshold in a nonsmooth system with jump discontinuities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2050141:1–11, 2020.
- [103] S. M. Ulam. On some statistical properties of dynamical systems. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 3:315–320, 1961.
- [104] 谢建华. 关于 Bouncing Ball 模型中对称性与马蹄研究. 科学通报, 43:2058–2061, 1998.
- [105] 谢建华. 一维混沌动力学引论. 科学出版社, 北京, 2013.
- [106] 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学. 科学出版社, 北京, 2018.
- [107] J. H. Xie and W. C. Ding. Hopf-Hopf bifurcation and invariant torus $\mathbb{T}^2$ of a vibro-impact system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:531–543, 2005.
- [108] J. G. You. Invariant tori and Lagrange stability of pendulum-type equations. *Journal of Differential Equations*, 85(1):54–65, 1990.
- [109] Y. Yue. Symmetry of the Poincaré map and its influence on bifurcations in a vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 323:292–312, 2009.
- [110] X. M. Zhang, Z. B. Cao, D. H. Li, and J. H. Xie. Existence of periodic solutions in the systems of the billiard type. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 20(3):1–14, 2021.
-

- [111] X. M. Zhang, J. H. Xie, D. H. Li, Z. B. Cao, and C. Grebogi. Stability analysis of the breathing circle billiard. *Chaos, Solitons & Fractals*, 115:111643–1–12, 2022.
 - [112] 张筑生. 微分动力系统原理. 科学出版社, 北京, 1987.
 - [113] V. Zharnitsky. Quasi-periodic motions in the billiard problem with a softened boundary. *Physical Review Letters*, 75(24):4393–4396, 1995.
 - [114] V. Zharnitsky. Instability in Fermi-Ulam ‘ping-pong’ problem. *Nonlinearity*, 11(6):1481–1487, 1998.
 - [115] V. Zharnitsky. Invariant curve theorem for quasiperiodic twist mappings and stability of motion in the Fermi-Ulam problem. *Nonlinearity*, 13(4):1123, 2000.
 - [116] V. Zharnitsky. Invariant tori in Hamiltonian systems with impacts. *Communications in Mathematical Physics*, 211(2):289–302, 2000.
-

攻读博士学位期间发表的论文和参加科研项目情况

发表论文情况

- 1 X. M. Zhang, C. Zeng, D. H. Li, J. H. Xie, and C. Grebogi. Invariant torus and its destruction for an oscillator with dry friction. *Nonlinear Dynamics*, 104:3467-3477, 2021.
- 2 X. M. Zhang, Z. B. Cao, D. H. Li, and J. H. Xie. Existence of periodic solutions in the systems of the billiard type. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 20(72):1-14, 2021.
- 3 X. M. Zhang, Z. B. Cao, D. H. Li, J. H. Xie, and C. Grebogi. Dynamics of dissipative systems with Hamiltonian structures. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(14):2150217-1-9, 2021.
- 4 X. M. Zhang, J. H. Xie, D. H. Li, Z. B. Cao, and C. Grebogi. Stability analysis of the breathing circle billiard. *Chaos, Solitons & Fractals*, 155:111643-1-12, 2022.
- 5 X. M. Zhang, Z. B. Cao, D. H. Li, C. Grebogi, and J. H. Xie. Quasi-periodic solutions and homoclinic bifurcation in an impact inverted pendulum. *Physica D*, 434:133210-1-14, 2022.
- 6 Z. B. Cao, X. M. Zhang, D. H. Li, S. Yin, and J. H. Xie. Existence of invariant curves for a Fermi-type impact absorber. *Nonlinear Dynamics*, 99(4):2647-2656, 2020.
- 7 D. H. Li, Z. B. Cao, X. M. Zhang, C. Grebogi, and J. H. Xie. Strange non-chaotic attractors from a family of quasiperiodically forced piecewise linear maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(7):2150111-1-9, 2021.

参加的科研项目

- 1 国家自然科学基金重点基金: 非光滑系统全局动力学及其应用研究 (11732014), 主持人: 谢建华.

- 2 国家自然科学基金: 非光滑动力系统的遍历论和大范围变分方法研究 (12172306),
主持人: 谢建华.

参加的学术会议

2021 年 5 月在广州参加非线性振动暨非线性动力学和稳定性学术会议, 并在会议上作报告, 报告题目为: 双面碰撞倒摆的拟周期解与同宿分岔.