扭转映射读书报告

张晓明

2018 年 6 月 12 日

目录

1 引言

扭转映射首先由 Poincaré 在研究限制性三体问题中提炼出来, 并提出了著名的 Poincaré 最后的几何定理, 但是他只给出了几种特殊情况的证明. Birkhoff 在 Poincaré 死后不久给出了这一定理的完整证明, 虽然有许多数学家质疑其正确性，但后人在这定理的严密性做的努力, 本质上仍基于 Birkhoff 的原始想法, 较为现代的证法参见 [2]. 60 年代著名的 KAM 理论对不变环面在小扰动下是否仍保持给予了肯定的答案, 80 年代初, Mather 与 Aubry 各自独立地对单调扭转映射作了更深一步的工作. 我们主要对 Bangert 在两人的工作基础上抽象出来的较一般的变分原理作阐述.

这篇报告的绝大多数内容来自 [1], 对于作者未给出的证明我们适当作了补充. 报告中处理的所谓变分问题, 对应于扭转映射的无限扭转情形, 另有台球模型及闭边界扭转情形, 这两种情形的结论可由扩展到无限扭转而得到, 参见 [1].

这篇报告的主要内容如下: 第 2 节，我们引入变分问题, 对于这一问题与扭转映射的联系作了一些说明; 第 3 节我们介绍了保向圆周同胚理论, 并集中讨论 Cantor 集的结构; 第 4 节我们证明周期极小轨道的存在性, 并研究极小轨道在平移下的序结构, 进而对任一极小轨道定义了旋转数; 第 5 节及第 6 节我们分别分析无理极小轨道集与有理极小轨道集的结构.

2 变分问题

在引入这一问题之前, 我们简要介绍积拓扑及 Tychonow 定理.

设 X 为拓扑空间, 其上的拓扑为 τ(即 X 中所有开集构成的集族), 我们称由 X 的一些子集构成的集族 $\mathcal{B}$ 为拓扑基, 如果 X 中任一开集是 $\mathcal{B}$ 中若干个 (可为零个, 有限个, 可数及不可数多个) 成员的并集. 我们可以在已给拓扑下寻找拓扑基, 也可通过定义拓扑基生成拓扑. 例如, 度量空间中所有开球构成的集族为一个拓扑基.

我们考虑无穷多个拓扑空间的乘积 $\prod X_\alpha$, $\prod X_\alpha$ 上的拓扑可由定义一个拓扑基生成, 定义此拓扑基为 $\mathcal{A} = \{\prod U_\alpha \in \mathcal{A}$: 对于有限多个 α, $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ 且为 X_α 中的开集, 剩余无穷多多个 α, $U_\alpha = X_\alpha\}$.

简言之, 对于跑到无穷的指标, 拓扑要粗糙一些. 例如, $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 为整数下标的直线的乘积, 在其上定义积拓扑, 这样定义的拓扑可以度量化:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\ d(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{Z}}\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{|i|+1}\}.$$

其中 $\bar{d}(x_i,y_i) = \min\{1, |x_i - y_i|\}$.

Tychonow 定理. *无穷多个紧致空间的乘积在积拓扑下仍是紧致的.*

考虑 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 且其上拓扑为积拓扑, 由 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的距离, 序列 $\{x^n\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 收敛到 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, 即要求

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i,\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

根据 Tychonow 定理, 给定 $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\ a_i \geq 0$, 集合 $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : |x_i| \leq a_i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$ 是紧的.

设 $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 对于任意有限长度的线段 $(x_j, ..., x_k)$，$j < k$, 对 H 作如下扩展:

$$H(x_j, \ldots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} H(x_i, x_{i+1}).$$

我们称 $(x_j, \ldots, x_k)$ 关于 H 是极小的, 如果

$$H(x_j, \ldots, x_k) \leq H(x_j^*, \ldots, x_k^*).$$

对于所有的 $(x_j^*, \ldots, x_k^*) \in \mathbb{R}^{k-j+1}, x_j = x_j^*, x_k = x_k^*$. 我们更关注下面的所谓轨道极小条件.

定义 2.1. 如果 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 的每一有限线段都是极小的, 则称 x 是极小的.

定义 2.2. 设 H 是 C^2 的, 我们称 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 是平衡的, 若

$$D_2H(x_{i-1}, x_i) + D_1H(x_i, x_{i+1}) = 0,\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

显然若 $x \in \mathcal{M}(H)$, x 是平衡的. 所有极小轨道的集合记为 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$, $4-6$ 节主要对 $\mathcal{M}(H)$ 的结构作分析.

我们须对 H 做一些限制以得到结论, 显然连续性是必需的, 以下四个条件是从无限单调扭转情形抽象出来的, 反映了生成函数和真实轨道的性质.

(H_1) **周期条件** $\forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,\ H(\xi + 1, \eta + 1) = H(\xi, \eta)$.

(H_2) **无限条件** $\lim_{|\eta|\to\infty} H(\xi, \xi + \eta) = \infty$, 对 ξ 一致地成立.

(H_3) **序条件** 若 $\xi^- < \xi^+,\ \eta^- < \eta^+$, 则 $H(\xi^-, \eta^-) + H(\xi^+, \eta^+) < H(\xi^-, \eta^+) + H(\xi^+, \eta^-)$.

(H_4) **横截条件** 若 $(x_{-1}, x_0, x_1) \neq (y_{-1}, y_0, y_1)$ 都是极小的, 且 $x_0 = y_0$, 则 $(x_{-1} - y_{-1})(x_1 - y_1) < 0$.

注. 若 H 是 C^2 的且满足 (H_1), $D_2D_1H \leq -\delta < 0$, 则 $(H_2) - (H_4)$ 可由这两个条件得到.

对于 (H_2), 对 D_2D_1H 在顶点为 $(\xi, \xi), (\xi, \xi + \eta), (\xi + \eta, \xi + \eta)$ 的三角形上积分, 得到

$$H(\xi, \xi + \eta) \geq \frac{1}{2}\eta^2\delta + H(\xi + \eta, \xi + \eta).$$

当 $|\eta|\to\infty$, 由 (H_1)，$H(\xi+\eta,\xi+\eta)$ 为有限值, 故 $H(\xi,\xi+\eta)\to\infty$.

对于 (H_3)，对 D_2D_1H 在顶点为 $(\xi^-,\eta^-),(\xi^+,\eta^-),(\xi^-,\eta^+),(\xi^+,\eta^+)$ 的矩形上积分得

$$H(\xi^+,\eta^+)-H(\xi^+,\eta^-)-H(\xi^-,\eta^+)+H(\xi^-,\eta^-)\leq-\delta(\eta^+-\eta^-)(\xi^+-\xi^-)<0.$$

对于 (H_4),$D_1H(\xi,\eta)$ 关于 η 单调递减 (对 D_2D_1H 在 $[\eta,\eta+\varepsilon]$ 上关于第二个变量积分), $D_2H(\xi,\eta)$ 关于 ξ 单调递减, 再根据平衡条件

$$D_2(x_{-1},x_0)+D_1(x_0,x_1)=D_2(y_{-1},y_0)+D_1(y_0,y_1)=0.$$

$x_0=y_0$ 时, 若 $x_{-1}>y_{-1}$, 则 $D_2(x_{-1},x_0)<D_2(y_{-1},y_0)$, 则 $D_1(x_0,x_1)>D_1(y_0,y_1)$, 故 $x_1<y_1$.

我们所证结论极大地依赖于极小轨道间的序结构, 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上定义偏序:

$$x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\ x<y \text{ 当且仅当 } x_i<y_i,\ \forall i\in\mathbb{Z}.$$

如果在 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 的某个子集 S 上, $\forall x,y\in S$, 这三种关系必然有一种且仅一种成立: $x<y$, $x=y$, $x>y$, 则称 S 是完全有序的.

定义 2.3. *$x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 相交, 若 $(i)(ii)$ 中任一个成立:*

(i) *在 $i\in\mathbb{Z}$ 处 $x_i=y_i$, 且 $(x_{i-1}-y_{i-1})(x_{i+1}-y_{i+1})<0$.*

(ii) *在 $i,i+1$ 之间有 $(x_i-y_i)(x_{i+1}-y_{i+1})<0$.*

直观上看, 我们可以定义 $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 的图像为 $\{(i,x_i):\ i\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$, 相邻的点用直线连接. x 与 y 相交, 当且仅当两个轨道的图像相交.

轨道的渐近性是动力学性质的一个重要方面, 我们引入以下定义:

定义 2.4. *$x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 是 $\alpha(\omega)$ 渐近的, 如果:*

$$\lim_{i\to-\infty(\infty)}|x_i-y_i|=0.$$

如果 $x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 同时 α 渐近与 ω 渐近, 则称 x 与 y 是渐近的.

由于我们在覆叠空间中研究极小轨道的结构, 便不得不考虑整数平移的影响. 令 T 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的一个 $\mathbb{Z}^2$ 的作用群, 定义如下:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ x\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\ T_{(a,b)}x=y,\ y_i=x_{i-a}+b.$$

定义 2.5. 设 $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $(q,p)\in(\mathbb{Z}\backslash\{0\})\times\mathbb{Z}$, $T_{(q,p)}x=x$, 且使得 $|p|$ 最小, 则称 x 是 (q,p) 周期的.

注. 在这种定义下, (q,p) 不一定互质, 但在第 4 节我们将证明若极小轨道的周期为 (q,p), 则 (q,p) 一定互质.

最后, 我们列举几条经常用到的性质, 并给出 (3)(4) 的证明:

(1) $H(x)=H(T_{(a,b)}x),\ \forall x=(x_j,\dots,x_k),\ j<k,\ \forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2.$

(2) $T_{(a,b)}$ 将极小线段映到极小线段, 且映 $\mathcal{M}$ 到自身.

(3) $\mathcal{M}$ 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 中是闭的.

(4) 设 $(x_j,\dots,x_k)$ 为任意有限长度线段, 则存在同样长度的极小线段 $(y_j,\dots,y_k)$ 使得 $y_j=x_j,\ y_k=x_k$.

(5) 若 $(x_j,\dots,x_k)$ 为极小线段, 则其任一子段都是极小的.

证明: (3) 设 $\{(x_j^n,\dots,x_k^n)\}$ 为一极小线段序列, 且

$$\lim_{n\to\infty}x_i^n=x_i,\ j\le i\le k.$$

那么 $(x_j,\dots,x_k)$ 是极小的. 若不是这样, 则存在 $(x_j,y_{j+1},\dots,y_{k-1},x_k)$ 使得

$$H(x_j,y_{j+1},\dots,y_{k-1},x_k)<H(x_j,...,x_k).$$

可取 $(x_j,\dots,x_k)$ 的一个小邻域使得上式在此小邻域内仍成立, 则 $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时, 使得

$$H(x_j,y_{j+1},\dots,y_{k-1},x_k)<H(x_j^n,\dots,x_k^n).$$

再取 (x_j,x_k) 的一个小邻域使得上式在此小邻域内仍成立, 则 $\exists\ N^*$, 当 $m>N^*$ 时, 使得

$$H(x_j^m,y_{j+1},\dots,y_{k-1},x_k^m)<H(x_j^n,\dots,x_k^n).$$

当 $n>\max\{N,N^*\}$ 时,

$$H(x_j^n,y_{j+1},\dots,y_{k-1},x_k^n)<H(x_j^n,\dots,x_k^n),$$

与 $(x_j^n,\dots,x_k^n)$ 的极小性相矛盾. 由于 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的收敛性意味着每个坐标都收敛, 故 $\mathcal{M}$ 是闭的.

(4) 固定 x_j,x_k, 取 a 充分大. 在 $\mathbb{R}^{k-j-1}$ 中, 令 $B=\{(x_j,\dots,x_k):H(x_j,\dots,x_k)\le a\}$, 由 H 的连续性, B 为闭集, 且在 B 中, 所有坐标都是有界的, 如若不然, 设存在某个坐标趋于 (负) 无穷, 由 (H_2), $H(x_j,\dots,x_k)$ 趋于无穷, 与 B 的定义矛盾, 故 B 为有界闭集, H 在 B 上能取到最小值 $H_{\min}$, $-\infty<H_{min}\le a$，在 B 以外的点, $H>a$, 故此极小也为 $\mathbb{R}^{k-j-1}$ 上的极小. □

3　保向圆周同胚的回归集

这一节我们主要讨论圆周同胚上回归集的结构. 对于某个圆周同胚的回归集, 可以用两个函数的像来表示, 这能够对回归集作更细致的讨论: 当回归集是 $Cantor$ 集, 有可数多个点只能从一侧逼近, 而不可数多个点能从两侧逼近, 且 $Cantor$ 集上的轨道渐近只存在一种情况, 即两条轨道时刻都处在游荡区间的两个端点. 对于不同圆周同胚相同旋转数的回归集的结构, 有一个较粗略的结果, 但对于之后的分析是有用的.

我们始终考虑提升以后的保向圆周同胚, 设

$$G^+ = \{f:\ f \text{ 连续且严格单调递增},\ f(x+1) = f(x)+1\}.$$

对于 $f \in G^+$, 定义 f 的旋转数:

$$\rho(f) = \lim_{|i|\to\infty} \frac{f^i(x)}{i}.$$

此极限存在且不依赖于 x, 旋转数是有理数或是无理数, 动力学性质有本质区别. 下面引入一个经常用到的引理:

引理 3.1. 设 $f \in G^+$, $\rho(f) = \alpha$,

(i) 对于固定的 $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$, 且其满足 $n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2$, 则 $f^{n_1}(x) + m_1 < f^{n_2}(x) + m_2$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 成立;

(ii) 对于固定的 $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$, 且其满足 $n_1\alpha + m_1 \le n_2\alpha + m_2$, 则 $f^{n_1}(x) + m_1 \le f^{n_2}(x) + m_2$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 成立;

证明: 我们这里只证 (i), (ii) 的证明类似. $n_1 = n_2$ 为平凡情形, 设 $n_1 > n_2$. 若 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使得

$$f^{n_1}(x_0) + m_1 \ge f^{n_2}(x_0) + m_2,$$

两边同时作用 $f^{n_1-n_2}$,

$$f^{n_1-n_2}(x_0) + m_1 \ge x_0 + m_2,$$

上式两边再同时作用 $f^{n_1-n_2}$,

$$f^{2(n_1-n_2)}(x_0) + m_1 \ge f^{n_1-n_2}(x_0) + m_2,$$

$$f^{2(n_1-n_2)}(x_0) - x_0 \ge 2(m_2 - m_1).$$

归纳地有:

$$f^{i(n_1-n_2)}(x_0) - x_0 \ge i(m_2 - m_1),\ i \in \mathbb{N}.$$

则

$$\alpha = \lim_{i\to\infty} \frac{f^{i(n_1-n_2)}(x_0) - x_0}{i(n_1-n_2)} \geq \frac{i(m_2-m_1)}{i(n_1-n_2)} > \alpha, \tag{3.1}$$

矛盾. □

注. 对于 α 为无理数，这个引理还可以反向推理. 若 $f^{n_1}(x)+m_1 < f^{n_2}(x)+m_2$ 对某个 x 成立, 则对所有的 x 都成立, 若非如此将存在周期点, 由旋转数的定义, 将得出其为无理数的矛盾; 按照引理 3.1 中推理方式将得到类似 (3.1) 中不等式, 但都为非严格的不等号, 利用 α 为无理数的性质, 等号不可能取到, 即可证. 当 α 为有理数时, 反向推时不能保证 $f^{n_1}(x)+m_1 < f^{n_2}(x)+m_2$ 不变号.

推论 3.1. $f \in G^+$, $\rho(f) = \alpha$, 令 $r_i(x) = f^i(x) - x - i\alpha$, 则 $|r_i(x)| < 1$ 且存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, $r_i(x) = 0$.

证明: 取 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $m \leq i\alpha < m+1$, 即 $0\alpha + m \leq i\alpha + 0 < 0\alpha + m + 1$, 由引理 3.1

$$m \leq f^i(x) - x < m+1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

所以 $i\alpha, f^i(x) - x \in [m, m+1)$, 因此我们有 $|r_i(x)| < 1$. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $r_i(x) \neq 0$, 不妨设 $r_i(x) > 0$, 由 $r_i(x+1) = r_i(x)$, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $r_i(x) > \varepsilon > 0$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

$$f^i(x) - x - i\alpha > \varepsilon,$$

将 x 替换成 $f^i(x)$,

$$f^{2i}(x) - f^i(x) - i\alpha > \varepsilon,$$

结合上两式,

$$f^{2i}(x) - x - 2i\alpha > 2\varepsilon,$$

归纳地有,

$$f^{ni}(x) - x - ni\alpha > n\varepsilon,\ n \in \mathbb{N}.$$

不妨设 $i > 0$, 则

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{ni}(x) - x}{ni} - \alpha \geq \frac{\varepsilon}{i} > 0,$$

矛盾. □

接下来我们讨论回归集的结构, 首先 $f \in G^+$ 的回归集为:

$$Rec(f) = \{f^i(x) + k :\ (i,k) \in \mathbb{Z}^2\}'$$

$'$ 表示集合聚点的全体. $Rec(f)$ 不依赖 x 的选取, 且 $Rec(f)$ 为极小集.

定义 3.1. 设 $f \in G^+$, $\rho(f) = \alpha$ 为无理数, 对于固定点 $x_0 \in \mathbb{R}$, $A = \{j\alpha + k:\ (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$, 定义:

$$\varphi:\ A \to \mathbb{R},\ \varphi(j\alpha + k) = f^j(x_0) + k,\ (j,k) \in \mathbb{Z}^2$$
$$x^+(t) = \inf\{f^j(x_0) + k:\ j\alpha + k > t\}$$
$$x^-(t) = \sup\{f^j(x_0) + k:\ j\alpha + k < t\}$$

由 引理 3.1, φ 是严格单调递增的. 再利用 A 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 对于 $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$ 有以下性质:

(a) $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$ 严格单调递增.

(b) $x^+(t)$ 右连续, $x^-(t)$ 左连续.

(c) x^+ 在 t_0 连续 $\Leftrightarrow$ x^- 在 t_0 连续, 且 $x^+(t_0) = x^-(t_0)$.

(d) $x^\pm(t+1) = x^\pm(t) + 1$.

(e) $f \circ x^\pm(t) = x^\pm(t + \alpha)$.

(f) $Rec(f) = x^+(\mathbb{R}) \cup x^-(\mathbb{R})$

证明: (a) 由 $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$ 的定义, $x^+(t) \geq x^-(t)$. 设 $t_1 < t_2$, 则存在 $t_1 < j_1\alpha + k_1 < j_2\alpha + k_2 < t_2$, 有

$$x^-(t_1) \leq x^+(t_1) \leq f^{j_1}(x_0) + k_1 < f^{j_2}(x_0) + k_2 \leq x^-(t_2) \leq x^+(t_2),$$

即 $x^-(t_1) < x^-(t_2)$, $x^+(t_1) < x^+(t_2)$, $x^+(t_1) < x^-(t_2)$.

(b) 由下确界的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j,k \in \mathbb{Z}$, $x^+(t_0) + \varepsilon > f^j(x_0) + k$, 且 $j\alpha + k > t_0$, 由 x^+ 的严格单调递增, 当 $t \in (t_0, j\alpha + k)$, $x^+(t) - x^+(t_0) < \varepsilon$. 同理可证 x^- 的左连续性.

(c) 设 x^+ 在 t_0 连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|t - t_0| < \delta$ 时, $|x^+(t) - x^+(t_0)| < \varepsilon$. 设 $t_0 - \delta < t_- < t_0$, $t_0 < t_+ < t_0 + \delta$, 则有

$$x^-(t_+) - x^-(t_0) < x^-(t_+) - x^+(t_-) = x^-(t_+) - x^+(t_0) + x^+(t_0) - x^+(t_-) < 2\varepsilon.$$

这证明了 $x^-(t_0)$ 的右连续性, 故 x^- 在 t_0 也连续. 同理反过来也可证. 又有

$$x^+(t_0) - x^-(t_0) < x^+(t_0) - x^+(t_-) < \varepsilon,$$

ε 是任意小的, 故 $x^+(t_0) = x^-(t_0)$.

(d) 令 $k-1=m$,

$$\begin{aligned} x^{+}(t+1) &= \inf\{f^{j}(x_0)+k:\ j\alpha+k>t+1\} \\ &= \inf\{f^{j}(x_0)+m+1:\ j\alpha+m>t\} \\ &= x^{+}(t)+1. \end{aligned}$$

(e) 与 (d) 中证明类似. (f) 验证即可. □

若 x^+ 与 x^- 连续, 则 $x^+=x^-$, $(x^+)^{-1}\circ f\circ x^+\circ x^+=R_\alpha\circ x^+$, 其中 $R_\alpha(t)=t+\alpha$, 即 $(x^+)^{-1}\circ f\circ x^+$ 拓扑共轭于一个无理旋转, $Rec(f)=\mathbb{R}$.

若 x^+ 在 t_0 不连续, 由 $(a)(b)(c)$, $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$ 不相同当且仅当两者同时在 t 处间断, $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$ 相同当且仅当两者同时在 t 处连续, 根据 $(d)(e)$, $x^+(x^-)$ 在 $\{t_0+j\alpha+k:(j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ 上不连续, 即在 $\mathbb{R}$ 上的一个稠密子集上间断, 而单调函数的间断点最多为可数多个, 则 $x^+(x^-)$ 有可数多个稠密的间断点. $Rec(f)/\mathbb{Z}$ 为一个 *Cantor* 集. 由 $x^+(x^-)$ 的右 (左) 连续性, $x^+(\mathbb{R})(x^-(\mathbb{R}))$ 有可数多个点只能从右 (左) 侧逼近, 而 *Cantor* 集的势跟连续统相同，故还有不可数多个点可从两侧逼近.

推论 3.2. *若 x^+ 在 t_0 不连续, 则 $(x^-(t_0),x^+(t_0))$ 是 $\mathbb{R}\setminus Rec(f)$ 中的开区间, 且 $Y=\bigcup(x^-(t_0+j\alpha)+k,\ x^+(t_0+j\alpha)+k)$ 是 $\mathbb{R}\setminus Rec(f)$ 中的两两不相交的开区间的并集, 即 Y 中每一连通分支都为游荡区间, 并且其在直线上是稠密的, 其余的游荡区间都包含于 Y 中.*

证明: 由 x^+,x^- 的单调性, $(x^-(t_0),x^+(t_0))$ 中不含 $\mathbb{R}\setminus Rec(f)$ 中点. 若对于 $(j_1,k_1)\neq(j_2,k_2)$, $(x^-(t_0+j_1\alpha)+k_1,\ x^+(t_0+j_1\alpha)+k_1)$ 与 $(x^-(t_0+j_2\alpha)+k_2,\ x^+(t_0+j_1\alpha)+k_2)$ 相交, 不妨设, $x^-(t_0+j_1\alpha)+k_1<x^-(t_0+j_2\alpha)+k_2<x^+(t_0+j_1\alpha)+k_2$, 则 $t_0+j_1\alpha+k_1<t_0+j_2\alpha+k_2<t_0+j_1\alpha+k_1$, 矛盾. 至于稠密性, 根据 x^- 在 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集上间断即得. 最后一条结论由稠密性便可立即得到. □

注. *上述推论说明, 所有的游荡区间通过一个游荡区间迭代即可全部生成.*

下面的引理说明, *Cantor* 集上的轨道渐近只存在一种情况, 即两条轨道时刻都处在游荡区间的两个端点.

引理 3.2. *由 Cantor 集上的两个点出发的轨道是渐近的当且仅当这两个点是 $\mathbb{R}\setminus Rec(f)$ 某一开区间上的两个端点.*

证明: 两点是 $\mathbb{R}\setminus Rec(f)$ 某一开区间上的两个端点, 即 $\exists t$, 使得这两点为 $x^+(t)$ 与 $x^-(t)$. 取 $k(i)\in\mathbb{Z}$, 使得 $t+k(i)+i\alpha\in[0,1)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f^i(x^+(t))-f^i(x^-(t))| &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}|x^+(t+i\alpha)-x^-(t+i\alpha)| \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}|x^+(t+i\alpha+k(i))-x^-(t+i\alpha+k(i))| \\ &\le |x^+(1)-x^+(0)| = 1.\end{aligned}$$

最后一步的估计是由于 $Rec(f)$ 在 $[0,1)$ 上的空隙不超过 x^+ 在 $[0,1]$ 上的增量. 故轨道是渐近的.

再说明若两点不是如此选取, 则轨道不可能是渐近的. 两点不是如此选取即 t 是不同的, 不妨设 $c>0$, 两点取为 $x^\pm(s+c)$ 与 $x^\pm(s)$, $\pm$ 可交叉选取. 由于 $|x^\pm(t+c)-x^\pm(t)|\ge |x^-(t+c)-x^+(t)|$, 我们证明:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}|x^-(t+c)-x^+(t)|\ge\delta>0,$$

一种情形即可. 可将 t 限制在 $[0,2]$ 内, 若

$$\inf_{t\in[0,2]}|x^-(t+c)-x^+(t)|=0,$$

等号只能通过渐近取到, 取 $\{t_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}|x^-(t_n+c)-x^+(t_n)|=0,$$

由于 $\{t_n\}$ 有界, 可取一收敛的子列, 仍记为 $\{t_n\}$, 若 $\{t_n\}$ 从右侧收敛到 t_0, 由 x^+ 的右连续性及 x^- 的单调性, 可得到

$$\lim_{n\to\infty}[x^-(t_n+c)-x^+(t_n)]\ge x^-(t_0+c)-x^+(t_0)>0,$$

若 $\{t_n\}$ 从左侧收敛到 t_0, 由 x^- 的左连续性及 x^+ 的单调性, 可同样得到上式, 矛盾. 故

$$\liminf_{i\to\pm\infty}|x^\pm(s+c+i\alpha)-x^\pm(s+i\alpha)|\ge\delta>0.$$

这说明轨道不可能是渐近的. □

引理 3.3. *设 $f,g\in G^+$, $\rho(f)=\rho(g)=\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则要么 $Rec(f)=Rec(g)$, $f|Rec(f)=g|Rec(g)$; 要么 $\exists x_0\in Rec(f)$, $y_0\in Rec(g)$, 两条轨道 $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\{g^i(y_0)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 相交无穷多次.*

证明: 对于 f, g 分别构造 $x^{\pm}$, $y^{\pm}$. 只看 x^- 与 y^-, 有以下两种可能:

(1) $\exists c \in \mathbb{R}$, $x^-(t+c) - y^-(t)$ 变号.

(2) 对于所有的 $c \in \mathbb{R}$, $x^-(t+c) - y^-(t)$ 不变号, 即, 如果 $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^-(t_0+c) - y^-(t_0) < 0$, 则 $x^-(t+c) - y^-(t) \leq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

对于 (1), 即 $\exists t_1, t_2$, 使得

$$x^-(t_1+c) < y^-(t_1), \ x^-(t_2+c) > y^-(t_2).$$

由 x^- 的左连续性, 可以找到两个非空的开区间使得上式仍成立, 即

$$\begin{aligned} x^-(t+c) < y^-(t), \ t \in I_1, \\ x^-(t+c) > y^-(t), \ t \in I_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

取 $x_0 = x^-(c)$, $y_0 = y^-(0)$, 有

$$f^j(x_0) = x^-(c + j\alpha), \ g^j(y_0) = y^-(j\alpha).$$

由于 $\{j\alpha + k : (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$(取 $\mathbb{N}$ 是为了避免有无穷多个 j 分别在 I_1, I_2 中, 而正无穷多个在 I_1, 负无穷多个在 I_2, 便可能只有一个交点) 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 且整数项对式 (3.2) 的成立无影响, 故必然有无穷多个 $j \in I_1$, 无穷多个 $j \in I_2$, 故 $\{f^j(x_0)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{g^j(y_0)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 无穷多次相交.

对于 (2), 令

$$c_0 = \sup\{c : \ x^-(t+c) \leq y^-(t), \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

首先说明, c_0 可以取到, 即

$$x^-(t+c_0) \leq y^-(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

由 c_0 的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_1$, $c_0 \geq c_1 > c_0 - \varepsilon$, 使得

$$x^-(t + c_0 - \varepsilon) < x^-(t + c_1) \leq y^-(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

ε 可以任意小, 而 x^- 左连续, 即 (3.3) 成立. 若 $\exists t_0$, $x^-(t_0+c_0) < y^-(t_0)$, 则 $\exists \varepsilon, \delta > 0$, 使得

$$x^-(t_0+c_0) < y^-(t_0) - \varepsilon < y^-(t_0 - \delta),$$

由假设, $x^-(t+c_0) \leq y^-(t-\delta)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 与 c_0 的取法矛盾. 故

$$x^-(t+c_0) = y^-(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

而 x^+ 与 x^- 只是在间断点取值不同, 则有

$$x^+(t+c_0) = y^+(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

再由 $(e)(f)$ 即得到结论. □

4 极小轨道的旋转数

这一节我们证明周期极小轨道的存在性, 并说明极小轨道在平移下是完全有序的, 进一步地, 可以将极小轨道作为某个保向圆周同胚的轨道, 这使得我们可以定义极小轨道的旋转数. 最后, 我们证明所有的旋转数都有对应的极小轨道.

这一节几乎所有的证明都用到 (H_3) 及 (H_4), 并依赖于极小轨道间的序结构. 下面的引理称为 *Aubry* 相交引理.

引理 4.1. *两条极小轨道最多相交一次, 且若 $x, y \in \mathcal{M}$ 在 i 处相等, 则 x, y 在 i 处相交.*

证明: 引理 4.1 后半部分即 (H_4). 假设 $x, y \in \mathcal{M}$ 在 i, k 处相交. 由 (H_4), 线段 (y_{j-1}, y_j, x_{j+1}) 与线段 (x_{j-1}, x_j, y_{j+1}) 不可能都是极小的, 故存在 $\bar{y}_j, \bar{x}_j$ 使得

$$H(y_{j-1}, \bar{y}_j, x_{j+1}) + H(x_{j-1}, \bar{x}_j, y_{j+1}) < H(y_{j-1}, y_j, x_{j+1}), H(x_{j-1}, x_j, y_{j+1}), \tag{4.1}$$

对于 k 处也同样有

$$H(y_{k-1}, \bar{y}_k, x_{k+1}) + H(x_{k-1}, \bar{x}_k, y_{k+1}) < H(y_{k-1}, y_k, x_{k+1}), H(x_{k-1}, x_k, y_{k+1}), \tag{4.2}$$

考虑线段 $(y_{j-1}, \bar{y}_j, x_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, \bar{y}_k, x_{k+1})$ 与线段 $(x_{j-1}, \bar{x}_j, y_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \bar{x}_k, y_{k+1})$. 根据 $(y_{j-1}, \ldots, y_{k+1})$, $(x_{j-1}, \ldots, x_{k+1})$ 的极小性,

$$H(y_{j-1}, \ldots, y_{k+1}) \leq H(y_{j-1}, \bar{y}_j, x_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, \bar{y}_k, x_{k+1}), \tag{4.3}$$

$$H(x_{j-1}, \ldots, x_{k+1}) \leq H(x_{j-1}, \bar{x}_j, y_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \bar{x}_k, y_{k+1}). \tag{4.4}$$

(4.3) 与 (4.4) 相加, 与 (4.1) 和 (4.2) 矛盾. 也可假设 x, y 在 $i, i+1$ 与 $k, k+1$ 处相交, 类似的处理参见引理 4.3. $\square$

推论 4.1. *若 $x, y \in \mathcal{M}$ 是周期的且具有相同的周期, 则 x, y 不相交; $x \in \mathcal{M}$ 的周期为 (q, p), 则 (q, p) 互质.*

证明: 若 x, y 相交一次, 由周期性必相交无穷多次, 与引理 4.1 矛盾. 设 $x \in \mathcal{M}$ 的周期为 $(q, p) = n(a, b)$, $n > 1$, (a, b) 互质. $T_{(a,b)}x \neq x$, 且 $T_{(a,b)}x$ 仍是 (q, p) 周期的, 故 $T_{(a,b)}x$ 与 x 不相交. 设 $T_{(a,b)}x < x$, 不等号两边同时作用 $T_{(a,b)}$,

$$T_{2(a,b)}x < T_{(a,b)}x,$$

这样一直作用下去有,

$$x = T_{n(a,b)}x < T_{(n-1)(a,b)}x < \cdots < x.$$

得到矛盾. $\square$

注. *上述论证说明极小周期轨道与其任意平移也不相交, 故其图像必然是一个严格单调的函数的图像 (以整数为自变量).*

引理 4.2. *设 $P_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : T_{(q,p)}x = x\}$, $H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbb{R}$, $H_{q,p}(x) = H(x_i, \dots, x_{i+q})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, 则 $H_{q,p}$ 在 $P_{q,p}$ 能取到最小值.*

证明: 首先我们说明 $H_{q,p}$ 的定义是确定的. 对于 $i \in \mathbb{Z}$, 可取 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $0 \le i + kq = j < q$, 由周期性,

$$\begin{aligned}
H(x_i, \dots, x_{i+q}) &= H(x_j - kp, \dots, x_{j+q} - kp) = H(x_j, \dots, x_{j+q}), \\
H(x_0, \dots, x_j) &= H(x_q - p, \dots, x_{j+q} - p) = H(x_q, \dots, x_{j+q}), \\
H(x_0, \dots, x_q) &= H(x_0, \dots, x_j) + H(x_j, \dots, x_{j+q}) \\
&= H(x_q, \dots, x_{j+q}) + H(x_j, \dots, x_q) \\
&= H(x_j, \dots, x_{j+q}).
\end{aligned}$$

故 $H(x_i, \dots, x_{i+q}) = H(x_0, \dots, x_q)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, H 的定义是确定的.

由于 $x_q - x_0 = p$, $P_{q,p}$ 可看作是 $\mathbb{R}^q$. $T : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $T(x_1, \dots, x_q) = (x_1 + 1, \dots, x_q + 1)$, 由 (H_1) 可认为 $H_{q,p}$ 定义在商空间 $\mathbb{R}^q/T$ 上, 事实上 $\mathbb{R}^q/T \cong S^1 \times \mathbb{R}^{q-1}$, 因此有一个坐标可始终看作是有界的, 取 a 充分大, 由 (H_2), $B = \{H_{q,p}(x) \le a\}$ 为非空有界闭集, 故 $H_{q,p}$ 在 B 上能取到最小值, 也为 $\mathbb{R}^q$ 上的最小值. □

定理 4.1. *对于所有的 $(q,p) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$, (q,p) 互质, 存在 $x \in \mathcal{M}$, x 的周期为 (q,p).*

证明: 不妨设 $q > 0$, 引入引理 4.2 中的记号. 设 $H_{q,p}$ 的两个最小点为 x, x^*, 假设 x, x^* 相交, 那么 $q \ge 2$, 定义:

$$x_i^+ = \max\{x_i, x_i^*\}, \ x_i^- = \min\{x_i, x_i^*\},$$

那么 x^+, x^- 也是 (q,p) 周期的, 则有

$$H_{q,p}(x^+) + H_{q,p}(x^-) \ge H_{q,p}(x) + H_{q,p}(x^*). \tag{4.5}$$

如果 x, x^* 在 i 与 $i+1$ 处相交, $0 \le i < q$, 由 (H_3), (4.5) 式不成立, 再根据周期性, x, x^* 也不在 $i, i+1$ 处相交, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

如果 x, x^* 在 i 处相交, 不妨设 $i = 1$, 根据 $q > 1$, 至少 (x_0, x_1, x_2) 与 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 是极小的, 而 (H_4) 意味着 (x_0, x_1, x_2) 与 (x_0^*, x_1^*, x_2^*) 不能都是极小的, 设前者不是极小的, 我们改变 x_1 为 $\bar{x}_1$, 使得,

$$H(x_0, \bar{x}_1, x_2) < H(x_0, x_1, x_2). \tag{4.6}$$

令 $\bar{x}$ 为这样的轨道, $\bar{x}_{1+kq} = \bar{x}_1 + kp$, 其余的指标处的值与 x 相同指标处的值相等, 这样 $\bar{x} \in P_{q,p}$, 但由 (4.6), $H_{q,p}(\bar{x}) < H_{q,p}(x)$, 与 x 在最小性矛盾. 因此 x 与 x^* 不相交. 特殊地有, 如果 x 是 $H_{q,p}$ 的最小点, 则 x 与其任意平移 $T_{(j,k)}x$ 不相交, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

$H_{q,p}$ 的最小点 x 只意味着线段 $(x_i, \ldots, x_{i+q})$ 的极小, $\forall i \in \mathbb{Z}$, 即任意长度小于等于 q 的线段是极小的, 我们接下来证明 x 的任意有限长度线段都是极小的.

假设 $n \geq 1$, $(q_*, p_*) = (nq, np)$, $x \in P_{q^*,p^*}$ 为 H_{q^*,p^*} 的最小点, 则 $T_{(q,p)}x$ 与 x 不相交, 如推论 4.1 中证明一样, 将得到 $x \in P_{q,p}$, 故,

$$H_{q^*,p^*} = nH_{q,p}(x),$$
$$H_{q^*,p^*}(y) = nH_{q,p}(y),\ \forall y \in P_{q,p}.$$

则有 $H^{\min}_{q^*,p^*} = nH^{\min}_{q,p}$, 即如果 x 是 $P_{q,p}$ 中的最小点, x 也为 $P_{nq,np}$ 的最小点, 对于 $n \geq 1$ 都成立. 即是, $(x_0, \ldots, x_{nq})$ 是极小线段, 对所有的 $n \geq 1$. 再由周期性质及 n 的任意性, 即得证. □

引理 4.3. *假设 $x, y \in \mathcal{M}$ 是 $\omega(\alpha)$ 渐近的, 且 $|x_{i+1} - x_i|$ 是有界的当 $i \to \infty(-\infty)$, 则 x, y 不相交.*

证明: 设 x, y 在 $i, i+1$ 处相交, x, y 是 ω 渐近的. 由 (H_3),

$$H(x_i, y_{i+1}) + H(y_i, x_{i+1}) < H(x_i, x_{i+1}) + H(y_i, y_{i+1}), \tag{4.7}$$

根据 $(x_i, \ldots, x_{j+1}), (y_i, \ldots, y_{j+1})$ 的极小性,

$$\begin{aligned} &H(x_i, y_{i+1}) + H(y_{i+1}, \ldots, y_j) + H(y_j, x_{j+1}) \\ &\qquad \geq H(x_i, x_{i+1}) + H(x_{i+1}, \ldots, x_j) + H(x_j, x_{j+1}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &H(y_i, x_{i+1}) + H(y_{i+1}, \ldots, x_j) + H(x_j, y_{j+1}) \\ &\qquad \geq H(y_i, y_{i+1}) + H(y_{i+1}, \ldots, y_j) + H(y_j, y_{j+1}). \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.8) 与 (4.9) 相加得,

$$\begin{aligned} &H(x_i, y_{i+1}) + H(y_j, x_{j+1}) + H(y_i, x_{i+1}) + H(x_j, y_{j+1}) \\ &\qquad \geq H(x_i, x_{i+1}) + H(x_j, x_{j+1}) + H(y_i, y_{i+1}) + H(y_j, y_{j+1}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

我们说明

$$\lim_{j\to\infty} |H(y_j, x_{j+1}) - H(y_j, y_{j+1})| = \lim_{j\to\infty} |H(x_j, y_{j+1}) - H(x_j, x_{j+1})| = 0.$$

当 j 充分大, (4.10) 即与 (4.7) 矛盾. 证第二个等式,

$$|H(x_j,y_{j+1})-H(x_j,x_{j+1})|=|H(x_j-k_j,y_{j+1}-k_j)-H(x_j-k_j,x_{j+1}-k_j)|,$$

取 k_j 使得 $0\le x_j-k_j<1$, 由引理 4.3 所设,

$$M\ge |x_{j+1}-x_j-k_j+k_j|\ge |x_{j+1}-k_j|-|x_j-k_j|,$$

故 $|x_{j+1}-k_j|$, $|y_{j+1}-k_j|$ 都有界, 而

$$\lim_{j\to\infty}|x_j-y_j|=0,$$

根据 H 在有界闭集上的一致连续性即得到,

$$\lim_{j\to\infty}|H(x_j,y_{j+1})-H(x_j,x_{j+1})|=0. \qquad \square$$

注. 由推论 *4.2* 我们知, 对于极小轨道 x, $|x_{j+1}-x_j|$ 都是有界的当 $j\to\infty(-\infty)$, 但这一结论的得到自始至终没有用 $|x_{j+1}-x_j|$ 是有界的这一假设, 故不存在循环论证.

下面的定理是极小轨道的一条重要性质.

定理 4.2. 设 $x\in\mathcal{M}$, 则 x 与 $T_{(a,b)}x$ 不相交, $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

证明: $a=0$ 时是明显的, 设 $a>0$. 由引理 4.1, x 与 $T_{(a,b)}x=y$ 至多相交一次, 设 x,y 在 0 或 $0,1$ 处相交, 那么在 0 处 x,y 的序关系将改变, 不妨设,

$$y_j<x_j,\ j\le 0;\ y_j>x_j,\ j>0. \tag{4.11}$$

这意味着, 对每个固定的 $j\le 0$, 序列 $v\in\mathbb{N}\to x_{j-va}+vb$ 单调递减, 对每个固定的 $j>0$, 序列 $v\in\mathbb{N}\to x_{j+va}-vb$ 也单调递减.

取 $\bar{x}\in\mathcal{M}$ 且 $\bar{x}$ 的周期为 (a,b), $\bar{x}_0<x_0$(若不满足可作平移 $T_{(0,k)}$ 使其满足), 引理 4.1 表明, $\bar{x}_j<x_j$ 对于 $j\le 0$ 或 $\bar{x}_j<x_j$ 对 $j>0$, 我们处理前者. 对于固定的 $j\le 0$, 序列 $v\to x_{j-va}+vb$ 单调递减且有下界 $\bar{x}_j=\bar{x}_{j-va}+vb$, 因此定义:

$$x_j^*=\lim_{v\to\infty}(x_{j-va}+vb)=\lim_{v\to\infty}(T_{(va,vb)}x)_j,\ j\le 0.$$

由上定义, $x^*_{j-va}+vb=x^*_j,\ j\le 0,\ v\in\mathbb{N}$. 令 $j=-va+r,\ -a<r\le 0$, 则有,

$$|x_j-x_j^*|=|x_{r-va}-x^*_{r-va}|=|x_{r-va}+vb-x_r^*|,$$
$$|y_j-x_j^*|=|x_{r-v(a+1)}+b-x^*_{r-va}|=|x_{r-v(a+1)}+v(b+1)-x_r^*|.$$

故 x 与 y 都 α 渐近于 $(x_j^*)_{j\le 0}$, 由周期性 $|x_{j+1}-x_j|$ 有界当 $j\to-\infty$, 由引理 4.3, 与 x,y 相交矛盾. $\square$

定义 4.1. 设 $x \in \mathcal{M}$, $B_x = \{T_{(a,b)}x : \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\bar{B}_x$ 为其闭包, 令 $p_i : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ 代表 $x \to x_i$ 的投射.

由积拓扑的定义, p_i 是开的, 连续的, 且是保序的, 由定理 4.2, $\bar{B}_x$ 是完全有序的, 则 p_0 限制在 $\bar{B}_x$ 是单射, 故 $p_0|\bar{B}_x : \ \bar{B}_x \to p_0(\bar{B}_x)$ 是同胚, $p_0(\bar{B}_x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的闭集. 下面的定理是这一节的主要结论.

定理 4.3. 对于每一个 $x \in \mathcal{M}$, 存在一个圆周同胚 $f \in G^+$, 使得 $x_{i+1} = f(x_i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

证明: 首先在一个闭子集 $A = p_0(\bar{B}_x)$ 上定义 f, 通过以下两种等价的方式,

$$f(x_0) := x_1, \ x \in \bar{B}_x; \ f := p_1 \circ (p_0|\bar{B}_x)^{-1}.$$

根据 p_0 在 $\bar{B}_x$ 上是同胚及 $\bar{B}_x$ 的完全保序性, f 的定义是确定的, 且 f 严格单调递增. $f(t+1) = f(t) + 1$, $\forall t \in A$, 这是由于在 $x_0 + 1$ 对应的轨道一定是 x_0 对于的轨道向上平移一个单位. 在 $\mathbb{R} \setminus A = \cup(a_n, b_n)$ 上通过直线连接来定义 f,

$$f((1-t)a_n + tb_n) := (1-t)f(a_n) + tf(b_n), \ t \in [0,1].$$

这样在直线的部分也是严格单调的, 也保证了连续性. 故 $f \in G^+$, 且有 $f(x_i) = f((T_{(-i,0)}x)_0) = x_{i+1}$. □

结合旋转数的定义和 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ 上的距离, 及定理 4.3, 推论 3.1, 我们得到以下推论.

推论 4.2. 存在连续映射 $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, 有以下性质:

(a) 对于所有的 $x \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{Z}$, $|x_i - x_0 - i\rho(x)| < 1$.

(b) 如果 $x \in \mathcal{M}$ 是 (q,p) 周期的, 则 $\rho(x) = p/q$.

(c) ρ 在 T 的作用下是不变的, 即 $\rho(T_{(a,b)}x) = \rho(x)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

证明: 对于 $x \in \mathcal{M}$, 构造定理 4.3 中的 f, 定义 $\rho(x) := \rho(f)$, 故 $\rho(x) = \lim_{i\to\infty} x_i/i$, 则对于 $x, y \in \mathcal{M}$,

$$\bar{d}(\rho(x), \rho(y)) = \lim_{i\to\infty} \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \le \sup_{i\in\mathbb{Z}} \{\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{|i| + 1}\}.$$

在直线上我们用了距离 $\bar{d}(x_i, y_i) = \min\{1, |x_i - y_i|\}$, 容易验证这与通常直线上的拓扑是一样的, 故 ρ 是连续的. $(a)(b)(c)$ 立即能由推论 3.1 及旋转数的定义得到. □

注. 我们称 $\rho(x)$ 为极小轨道 x 的旋转数. 由 (a), $x \in \mathcal{M}$ 的增长几乎是线性的, 那么即有, 若 $\rho(x) \ne \rho(y)$, 那么 x, y 必然相交一次且仅相交一次.

定理 4.4. *对于所有的* $\alpha \in \mathbb{R}$, *集合* $\mathcal{M}_\alpha = \{x \in \mathcal{M} : \ \rho(x) = \alpha\}$ *非空.*

证明: 根据定理 4.1 及推论 4.2(b), 当 $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{M}_\alpha$ 非空. 任取 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 可取一序列 $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, 取 $x^n \in \mathcal{M}_{\alpha_n}$ 使得 $x_0^n \in [0,1]$. $|\alpha_n| \le C$, 由推论 4.2(a) 有以下估计:

$$|x_i^n| \le 2 + |i|C, \ \forall n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}.$$

即 $\{x^n\}$ 在一紧集上, 故有收敛的子列收敛到 x^*, 由 ρ 的连续性及 $\mathcal{M}$ 是闭集, $x^* \in \mathcal{M}$ 且 $\rho(x^*) = \alpha$. □

注. *上述证明说明集合* $\{x \in \mathcal{M} : \ |x_0| \le C, \ |\rho(x)| \le C\}$ *包含于一个紧集内, 又根据* ρ *的连续性, 这集合是闭的, 故其也为紧集.*

这一节的最后我们说明: 如果 H 是 C^2 的, 且 $D_2D_1H < 0$, 那么定理 4.3 构造出的 $f \in G^+$ 是双向 *Lipschitz* 连续的, 即 f 与 f^{-1} 都是 *Lipschitz* 连续的. 由于 f 在 $A = p_0(\bar{B}_x)$ 以外是直线连接, 我们在 A 上证明即可.

定理 4.5. $f : A \to A$ *是双向 Lipschitz 连续的.*

证明: 首先, 对于 $x_0 \in A$, $|x_1 - x_0|, |x_0 - x_{-1}|$ 都是一致有界的, 由推论 4.2(a),

$$|x_1 - x_0| - |\alpha| \le |x_1 - x_0 - \alpha| < 1,$$

即得到. 对于 $x_0, y_0 \in A$, 不妨设 $0 \le x_0 < y_0 < 2$, 那么应有 $x_{-1} < y_{-1}, x_1 < y_1$. 根据一致有界性, x_{-1}, x_0, x_1 与 y_{-1}, y_0, y_1 都包含在某个紧致区间 I 内. 由 $D_2D_1H < 0$, 则在 $I \times I$ 上, D_2H, D_1H 是 *Lipschitz* 连续的且有 *Lipschitz* 常数 L, $D_2D_1H \le -\delta < 0$. 由极小轨道的平衡性,

$$D_2H(x_{-1}, x_0) + D_1H(x_0, x_1) = D_2H(y_{-1}, y_0) + D_1H(y_0, y_1) = 0,$$

同时又有估计

$$\begin{aligned}\delta((y_{-1} - x_{-1}) + (y_1 - x_1)) &\le D_2H(x_{-1}, x_0) - D_2H(y_{-1}, x_0) + D_1H(x_0, x_1) - D_1H(x_0, y_1) \\ &= D_2H(y_{-1}, y_0) - D_2H(y_{-1}, x_0) + D_1H(y_0, y_1) - D_1H(x_0, y_1) \le 2L(y_0 - x_0).\end{aligned}$$

由 (H_1) 及 $\bar{B}_x$ 的 T 不变性, $0 \le x_0 < y_0 < 2$ 是不失一般性的, 故得证. □

注. *事实上, 上述定理可稍作推广, 如果* $\mathcal{N}$ *是* $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *上的完全有序的* T *不变闭集, 且* $\mathcal{N}$ *中每一元素都是平衡的, 那么我们对* $\mathcal{N}$ *同* $\bar{B}_x$ *一样作从定理 4.3 到定理 4.4 的处理, 则上述证明可以重述.*

5 无理极小轨道集的结构

这一节我们研究 $\mathcal{M}_\alpha(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 的结构. 由定理 4.3 知, 任一极小轨道都可以作为某一保向圆周同胚的轨道, 这一结论的得到, 依赖于极小轨道在任一平移下保序的性质, 我们将证明 $\mathcal{M}_\alpha$ 同 $\bar{B}_x$ 一样, 也是闭的完全有序集, 用定理 4.3 的方法, 便可以将所有具有同一无理旋转数的极小轨道都作为同一个圆周同胚的轨道, 这样问题就转化到了圆周同胚上.

定理 5.1. 设 α 为无理数, 则 $\mathcal{M}_\alpha$ 是完全有序的.

证明: 首先, 我们说明, $\forall x, y \in \mathcal{M}_\alpha$, 分别构造定理 4.3 中的 f, g, 则 f, g 的回归集中的轨道都为极小轨道, 且 $Rec(f) = Rec(g)$. 由引理 3.3, 说明后者成立只需证明 f, g 的回归集中不存在相交无穷多次的轨道, 而极小轨道至多相交一次, 故我们只需证 f, g 的回归集中的轨道都为极小轨道即可.

取 $x \in \mathcal{M}_\alpha$, $f \in G^+$, 使得 $x_i = f^i(x_0)$, $i \in \mathbb{Z}$. 由 f 的回归集的定义, $\forall x_0^* \in Rec(f)$, 存在序列 $(i_n, k_n) \in \mathbb{Z}^2$ 使得,

$$x_0^* = \lim_{n\to\infty}(x_{i_n} + k_n),$$

故有,

$$x_i^* = f^i(x_0^*) = \lim_{n\to\infty} f^i(x_{i_n} + k_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{in+i} + k_n).$$

即 $x^* = \lim_{n\to\infty} T_{(-i_n,k_n)}x$, 由 ρ 的连续性, $\mathcal{M}_\alpha$ 是闭的, 且 ρ 是 T 不变的, 故 $x^* \in \mathcal{M}_\alpha$.

下面证明所述定理. 取上述 x, y 与 f, g, 令 $x^\pm, y^\pm$ 分别为定义 3.1 中构造的函数, 固定点分别取 x_0, y_0, 则存在 c, 使得 $x^\pm(t+c) = y^\pm(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 由 $x^\pm, y^\pm$ 的定义,

$$x^-(j\alpha) \le x_j \le x^+(j\alpha),$$
$$y^-(j\alpha) \le y_j \le y^+(j\alpha).$$

若 $c \neq 0$, 不妨设 $c > 0$, 则有

$$x_j \le x^+(j\alpha) = y^+(j\alpha - c) < y^-(j\alpha) \le y_j, \ j \in \mathbb{Z}.$$

即 $x < y$, 同理 $c < 0$ 时有, $x > y$, 故 $c \neq 0$ 时, x, y 不相交. 当 $c = 0$, 即 $x^\pm = y^\pm$, 此时 x, y 是渐近的, 由于

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |y_j - x_j| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |y^+(j\alpha) - x^-(j\alpha)| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |y^+(j\alpha) - y^-(j\alpha)| \le 1.$$

最后一步的估计参见引理 3.2, 由引理 4.3, x, y 不相交. □

上述定理使得我们可以用定理 4.3 的方法, 将所有的具有同一无理旋转数的极小轨道作为同一个圆周同胚的轨道, 即 $\forall x \in \mathcal{M}_\alpha$, $\exists f \in G^+$, 使得 $f(x_i) = x_{i+1}$. 同样的, $p_0 : \mathcal{M}_\alpha \to p_0(\mathcal{M}_\alpha) = A_\alpha$ 是一个同胚, A_α 是 f 的一个闭不变集. 我们更关注所谓的回归轨道集的结构, 定义回归轨道集为:

$$\mathcal{M}_\alpha^{Rec} := \{x \in \mathcal{M}^\alpha :\ \exists (j_n, k_n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0),\ \lim_{n\to\infty} T_{(j_n,k_n)} x = x\}.$$

若 $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$, 显然 $p_0(x) = x_0$ 为聚点, 故 $p_0(x) \in Rec(f)$; 反之若 $x_0 \in Rec(f)$, 由 $Rec(f)$ 是极小集, 由此集合出发的轨道在该集合中稠密, 故存在 $(-j_n, k_n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)$, 使得,

$$\lim_{n\to\infty} (f^{-j_n}(x_0) + k_n) = x_0,\ \lim_{n\to\infty} (f^{-j_n}(x_j) + k_n) = x_j,\ j \in \mathbb{Z}.$$

即 $x = \lim_{n\to\infty} T_{(j_n,k_n)} x$, 故 $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$, $p_0(\mathcal{M}_\alpha^{Rec}) = Rec(f)$. 另一方面, $p_0(\bar{B}_x) = \overline{\{f^j(x_0) + k\}}$. 那么有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_\alpha^{Rec} & \subseteq & \bar{B}_x & \subseteq & \mathcal{M}_\alpha \\
\wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\
Rec(f) & \subseteq & \overline{\{f^j(x_0) + k\}} & \subseteq & A_\alpha
\end{array}$$

交换图中只有 $\mathcal{M}_\alpha^{Rec} \subseteq \bar{B}_x$ 未证, 但根据集合的包含关系即得到. 那么对任意的 $x \in \mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha^{Rec} \subseteq \bar{B}_x$.

推论 5.1. 对任意的 $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 都可由周期极小轨道逼近.

证明: 设 $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ 是能被周期极小轨道逼近的 $\mathcal{M}_\alpha$ 中元素的全体, 由定理 4.4 的证明, 此集合是非空的, 且容易验证 $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ 是 T 不变的与闭的, 即 $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha$ 中元素在平移下仍能被周期极小轨道逼近, 其极限点也能被周期极小轨道逼近, 则任取 $x \in \tilde{\mathcal{M}}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha^{Rec} \subseteq \bar{B}_x \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_\alpha$. □

$Rec(f) = \mathbb{R}$ 或 $Rec(f)$ 是一个 $Cantor$ 集, $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 的结构全然不同:

(a) $Rec(f) = \mathbb{R}$. $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 的图像铺满了整个平面, 即 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$, $y_0 = x_0$. 并且, $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 中序列的收敛是一致的, 即如果 $\{x^n\} \subseteq \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 收敛到 $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $|x_i^n - x_i| < \varepsilon$, 对所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 都成立.

(b) $Rec(f)$ 是一个 $Cantor$ 集. 在这种情况下 $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 中有三种不同类型的轨道: $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 只能由在其之上的 $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 中的元素逼近; $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 只能由在其之下的 $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 中的元素逼近; $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 可由两边同时逼近. 前两种类型的轨道分别对应于 $\mathbb{R} \setminus Rec(f)$ 中的开区间的右端点与左端点, 且都为可数多个. 最后一类轨道对应于 $\mathbb{R} \setminus Rec(f)$

中非端点的那些点, 这类轨道的势跟连续统的势相同. $x, y \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 是渐近的当且仅当 x_0 与 y_0 是 $\mathbb{R} \setminus Rec(f)$ 中某一开区间上的两个端点, 且 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |y_i - x_i| \leq 1$. $\mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 上的收敛总是不一致的.

证明: $(a)(b)$ 中的叙述大部分由第 3 节便可立即得到, 我们证 $(a)(b)$ 中描述的两种收敛性.

当 $Rec(f) = \mathbb{R}$, 设 $\{x^n\} \subseteq \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 收敛到 $x \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$, 当 n 充分大, $|x_0^n - x_0|$ 可以任意小. 由 f 拓扑共轭于一个无理旋转 R,

$$|x_i^n - x_i| = |f^i(x_0^n) - f^i(x_0)| = |h(R^i(x_0^n) - R^i(x_0))h^{-1}|.$$

而对于所有的 $i \in \mathbb{Z}$, $|R^i(x_0^n) - R^i(x_0)| = |x_0^n - x_0|$, 由 h, h^{-1} 的一致收敛性, 当 n 足够大, $|x_i^n - x_i|$ 可以任意小, 对所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 都成立.

当 $Rec(f)$ 是一个 $Cantor$ 集, 我们证明以下结论: $a_\alpha := \max\{|x_i - x_i^*| : x, x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 是渐近的 $\}$, 即游荡区间长度的最大值, 如果 $x, x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{Rec}$ 不是渐近的, 且 $x > x^*$, 则

$$\inf_{i\in\mathbb{Z}}(x_i - x_i^*) > 0, \quad \limsup_{i\to\infty(-\infty)} (x_i - x_i^*) > a_\alpha.$$

由推论 3.2 及引理 3.2, a_α 的定义是确定的, 即对于任意两条渐近轨道, a_α 是相同的. 那么如果上述结论成立, $Cantor$ 集上的收敛不会是一致的, 因为对于任意的 n, 若 x^n, x 是渐近的, $\max |x_i^n - x_i| = a_\alpha$; 若 x^n, n 不是渐近的, 则 $\sup |x_i^n - x_i| > a_\alpha$, 因此当 n 充分大, 对于所有的 i, $|x_i^n - x_i|$ 不能是任意小的.

下面我们证明上述结论. 对于 f 构造 $x^\pm$. 则这时有 $a_\alpha = \max(x^+(t) - x^-(t))$. 由引理 3.2, x, x^* 不是渐近的, 则存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 使得:

$$\begin{aligned}
x_i &= x^+(i\alpha + c_1) \text{ 或 } x_i = x^-(i\alpha + c_1), \\
x_i^* &= x^+(i\alpha + c_2) \text{ 或 } x_i^* = x^-(i\alpha + c_2).
\end{aligned}$$

$x > x^*$, 则 $c_1 > c_2$. 由引理 3.2, $\inf(x_i - x_i^*) \geq \delta > 0$. 取 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $x^+(t_0) - x^-(t_0) = a_\alpha$, 取 $(i_n, k_n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, 使得 $t_0 - c_1 < i_n\alpha - k_n < t_0 - c_2$, 且 $\lim_{n\to\infty} i_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(i_n\alpha - k_n + c_2) = t_0$. 则有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (x_{i_n} - x_{i_n}^*) &\geq \lim_{n\to\infty} (x^-(i_n\alpha - k_n + c_1) - x^+(i_n\alpha - k_n + c_2)) \\
&= x^-(t_0 - c_2 + c_1) - x^-(t_0) + x^+(t_0) - x^+(t_0) \\
&\geq a_\alpha + \delta.
\end{aligned}$$

当 $i \to -\infty$ 证明类似. $\square$

6 有理极小轨道集的结构

这一节我们研究 $\mathcal{M}_\alpha(\alpha = q/p,\ (q,p)$ 互质) 的结构, 除了 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$, 即 (q,p) 周期的极小轨道, 我们还关注趋近于周期极小轨道的那些极小轨道.

定理 6.1. *$\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 是非空的, 完全有序的闭集. $x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ 当且仅当 x 是 $H_{q,p} : P_{q,p} \to \mathbb{R}$ 的一个最小点.*

证明: 第一条结论事实上已经证过, 非空性由定理 4.1 得到, 完全有序性由推论 4.1 得到, 闭性由极小轨道的极限仍是极小轨道得到.

定理 4.1 已经证明充分性, 下面证必要性. 假设存在 $y \in P_{q,p},\ x \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$, 使得

$$\delta = H(x_0, \ldots, x_q) - H(y_0, \ldots, y_q) > 0.$$

取 n 充分大, 使得

$$n\delta > H(x_0, y_1) - H(y_0, y_1) + H(y_{q-1}, x_q) - H(y_{q-1}, y_q).$$

由 $H(y_{q-1}, x_q) = H(y_{nq-1}, x_{nq}),\ H(y_{q-1}, y_q) = H(y_{nq-1}, y_{nq})$, 我们得到

$$H(x_0, y_1, \ldots, y_{nq-1}, x_{nq}) < H(y_0, y_1, \ldots, y_{nq-1}, y_{nq}) + n\delta = H(x_0, \ldots, x_{nq}).$$

与 $(x_0, \ldots, x_{nq})$ 的极小性矛盾. □

$\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 中的两个元素称作是相邻的, 如果不存在 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 中其他元素在这两元素之间.

定义 6.1. *设 x^+, x^- 为 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 中两相邻的元素, $x^+ > x^-$, 定义:*

$$\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha :\ x, x^- \text{ 是 } \alpha \text{ 渐近的},\ x, x^+ \text{ 是 } \omega \text{ 渐近的}\}$$
$$\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+) := \{x \in \mathcal{M}_\alpha :\ x, x^- \text{ 是 } \omega \text{ 渐近的},\ x, x^+ \text{ 是 } \alpha \text{ 渐近的}\}$$

$\mathcal{M}_\alpha^+(\mathcal{M}_\alpha^-)$ 代表所有的相邻元素对 x^-, x^+ 所确定的集合 $\mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+)(\mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+))$ 的全体的并集.

注. 根据引理 *4.3*, $\forall x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) \cup \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$, 则 $x^- < x < x^+$.

定理 6.2. *$\mathcal{M}_\alpha$ 是 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$, $\mathcal{M}_\alpha^+$ 和 $\mathcal{M}_\alpha^-$ 三个集合的无交并.*

证明: 这三个集合显然是不相交的, 故我们只需证: $\forall x \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{M}_\alpha^{per}$, $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-, x^+) \cup \mathcal{M}_\alpha^-(x^-, x^+)$.

首先构造 x^+, x^-. 由定理 4.3, 存在 $f \in G^+$, 使得 $f(x_i) = x_{i+1}$, $\rho(x) = p/q$. 考虑周期函数 $r_q(t) = f^q(t) - t - p$. 由于 $x \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{M}_\alpha^{per}$, 则 $r_q(x_0) \neq 0$, 否则 x 将会是周期的, 设 $r_q(x_0) > 0$, 由推论 3.1, 存在 t_0 使得 $r_q(t_0) = 0$, 根据周期性, 这样的 t_0 不止一个, 取 x_0^-, x_0^+ 是 x_0 左右两边分别最近的零点, 即 $x_0 \in (x_0^-, x_0^+)$, $r_q|(x_0^-, x_0^+) > 0$. 那么有:

$$x_0^- = f^{nq}(x_0^-) - np < f^{nq}(x_0) - np < f^{nq}(x_0^+) - np = x_0^+.$$

且易验证序列 $\{f^{nq}(x_0) - np\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是严格单调递增的, 由上式其有上下界, 则可知:

$$\lim_{n\to-\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^-,\ \lim_{n\to\infty}(f^{nq}(x_0) - np) = x_0^+.$$

若上两式的极限不是 x_0^-, x_0^+, 将与 x_0^-, x_0^+ 分别是 x_0 左右两边最近的零点相矛盾. 定义 x^-, x^+, 通过 $x_i^- = f^i(x_0^-)$, $x_i^+ = f^i(x_0^+)$. 容易验证 $T_{(q,p)}x^- = x^-$, $T_{(q,p)}x^+ = x^+$, 且

$$\lim_{n\to-\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^-,\ \lim_{n\to\infty} T_{(-nq,-np)}x = x^+.$$

故 $x^-, x^+ \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$, $x^- < x < x^+$. 至于渐近性, $n = kq + j$, $0 \le j < q$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}|x_n - x_n^+| &= \lim_{k\to\infty}|x_{kq+j} - x_{kq+j}^+| \\
&= \lim_{k\to\infty}|x_{kq+j} - kp - x_j^+| \\
&= \lim_{k\to\infty}|(T_{(-kq,-kp)}x)_j - x_j^+| = 0.
\end{aligned}$$

类似的可证 x^-, x 是 α 渐近的. 当 $r_q(x_0) < 0$ 时, 类似的证明可得出, x^-, x 是 ω 渐近的, x^+, x 是 α 渐近的.

接下来我们说明上述构造的 x^-, x^+ 是相邻元素对. 假设存在 $x^* \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ 使得 $x^- < x^* < x^+$, 则由 x 与 x^-, x^+ 的渐近性, x, x^* 必然相交, 不妨设两者在 $i-1$ 与 i 处相交. 对于 $j > i$, 考虑线段 $(x_{i-1}, x_i^*, \ldots, x_{i+q-1}^*, x_i + p, \ldots, x_{j-1} + p, x_{j+q}) = (\bar{x}_{i-1}, \ldots, \bar{x}_{j+q})$, 我们证明当 j 充分大时:

$$H(\bar{x}_{i-1}, \ldots, \bar{x}_{j+q}) < H(x_{i-1}, \ldots, x_{j+q}), \tag{6.1}$$

与 x 的极小性矛盾. 由上述:

$$\begin{aligned}
H(\bar{x}_{i-1}, \ldots, \bar{x}_{j+q}) = H(x_{i-1}, x_i^*) + H(x_i^*, \ldots, x_{i+q}^*) - H(x_{i+q-1}^*, x_{i+q}^*) \\
+ H(x_{i+q-1}^*, x_i + p) + H(x_i, \ldots, x_{j-1}) + H(x_{j-1} + p, x_{j+q}),
\end{aligned} \tag{6.2}$$

由 x, x^* 在 $i, i-1$ 处相交, 且应有 $x_{i-1} < x_{i-1}^*$, $x_i > x_i^*$, 由 (H_3) 及 x^* 的周期性,

$$H(x_{i-1}, x_i) - H(x_{i-1}^*, x_i) > H(x_{i-1}, x_i^*) - H(x_{i+q-1}^*, x_{i+q}^*),$$

代入 (6.2) 式得到:

$$H(\bar{x}_{i-1},\dots,\bar{x}_{j+q}) = H(x_{i-1},\dots,x_{j-1}) + H(x_i^*,\dots,x_{i+q}^*) + H(x_{j-1}+p, x_{j+q}) - \varepsilon, \quad (6.3)$$

对于某个 $\varepsilon > 0$ 成立. 又 x, x^+ 是 ω 渐近的, 则有:

$$\lim_{j\to\infty} |H(x_{j-1},x_j) - H(x_{j-1}+p, x_{j+q})| = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty} |H(x_j,\dots,x_{j+q}) - H(x_0^+,\dots,x_q^+)| = 0. \quad (6.4)$$

而由定理 6.1, $H(x_0^+,\dots,x_q^+) = H(x_0^*,\dots,x_q^*)$, 即有

$$\lim_{j\to\infty} |H(x_j,\dots,x_{j+q}) - H(x_0^*,\dots,x_q^*)| = 0. \quad (6.5)$$

则当 j 充分大, 由式 (6.3)(6.4)(6.5), 即得到 (6.1). □

这一节的最后, 我们证明 $\mathcal{M}_\alpha^-, \mathcal{M}_\alpha^+$ 都是非空的.

定理 6.3. 设 x^-, x^+ 是相邻元素对, 则 $\mathcal{M}_\alpha^-(x^-,x^+), \mathcal{M}_\alpha^+(x^-,x^+)$ 都是非空的.

证明: 首先取序列 $\alpha_n > \alpha$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$, 取 x^n, $\rho(x^n) = \alpha_n$. 根据推论 4.2(a), 直观上看, x^n 的图像的斜率随着 n 增大渐渐趋于 α, 我们对 x^n 作适当平移使其趋近于某个 $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-,x^+)$. 令 $\varepsilon = \min_{i\in\mathbb{Z}}(x_i^+ - x_i^-)$, 取 $i(n)\in\mathbb{Z}$, 使得

$$i < i(n) \text{ 时},\ x_i^n \le x_i^- + \frac{\varepsilon}{2};\ \text{且 } x_{i(n)}^n > x_{i(n)}^- + \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据推论 4.2(a), 这样的选取是可行的. 取 $k(n)\in\mathbb{Z}$ 使得 $j(n) = i(n)+k(n) \in \{0,\dots,q-1\}$, 令 $\bar{x}^n = T_{k(n)(q,p)}x^n$. 则根据 x^- 的周期性,

$$\bar{x}_i^n = x_{i-k(n)q}^n + k(n)p \le x_i^- + \frac{\varepsilon}{2},\ i < j(n);\ \bar{x}_i^n > x_i^- + \frac{\varepsilon}{2},\ i = j(n).$$

由于 $j(n)$ 的选取是有限多个, 对于无穷多个 n, 必然有某个 j 出现了无穷多次, 取 j 重复出现的子列, 仍记为 $\bar{x}^n$, 设 $|\alpha_n| \le C$, 则 $|\bar{x}_j^n - \bar{x}_{j-1}^n - \alpha_n| < 1$, 那么有

$$x_i^- + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{x}_j^n < \bar{x}_{j-1}^n + \alpha_n + 1 \le x_{j-1}^- + \frac{\varepsilon}{2} + 1 + C,$$

即 $\bar{x}_j^n$ 是有界的, 则根据定理 4.4 的注, 存在收敛的子列收敛到 $x \in \mathcal{M}_\alpha$, $\rho(x) = \alpha$, 则有

$$x_i \le x_i^- + \frac{\varepsilon}{2} < x_i^+,\ i < j;\ x_j \ge x_j^- + \frac{\varepsilon}{2} > x_j^-.$$

由定理 6.2, 这种情形只能有 $x^- < x < x^+$, 又 $x_i \le x_i^- + \varepsilon/2$, 故 $x \in \mathcal{M}_\alpha^+(x^-,x^+)$. 同理, 可取序列 $\alpha_n < \alpha$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$, 我们可得到 $x \in \mathcal{M}_\alpha^-(x^-,x^+)$. □

根据这一节的三个定理, 我们可以对 $\mathcal{M}_\alpha$ 的结构做一个描述. 通过投射 p_0, 可以将 $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 与实轴上的一个闭子集 A_α^{per} 建立一个同胚关系. 在极为特殊地情形, $A_\alpha^{per}=\mathbb{R}$, 则 $\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 是完全有序的. 对于其他情形, $\mathcal{M}_\alpha^{per}$ 中有相邻元素对可以通过 $\mathcal{M}_\alpha^-$ 或 $\mathcal{M}_\alpha^+$ 中的元素异宿连接. 若 $x\in\mathcal{M}_\alpha^-$, $x^*\in\mathcal{M}_\alpha^+$ 位于同一相邻元素对之间, 那么 x, x^* 相交, 并且 $\mathcal{M}_\alpha$ 中两条轨道相交也只在这种情形下发生. 特别地有, $\mathcal{M}_\alpha^{per}\cup\mathcal{M}_\alpha^-$ 与 $\mathcal{M}_\alpha^{per}\cup\mathcal{M}_\alpha^+$ 都是完全有序的闭集, 按照第 5 节中类似的处理, 可以将这两个集合分别作为两个圆周同胚 f_0, f_1 的闭不变集, 且 $\rho(f_0)=\rho(f_1)=\alpha$.

参考文献

[1] V. Bangert, Mather Sets for Twist Maps and Geodesics on Tori[M]// Dynamics Reported. Vieweg+Teubner Verlag, 1988:1-56.

[2] M. Brown, W. D. Neumann, Proof of the Poincare-Birkhoff fixed point theorem[J]. Michigan Mathematical Journal, 1977, 24(1):1311-1331.

[3] J. N. Mather, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. Topology, 21 (1982),457-67.

[4] J. N. Mather, A criterion for the non-existence of invariant circles. Publ. Math.IHES, 63 (1986), 153-204.

[5] J. N. Mather, G. Forni, Action minimizing orbits in hamiltomian systems[M]// Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 1994:92-186.

[6] J. R. Munkres, Topology, Second Edition[M]. China Machine Press, 2004.