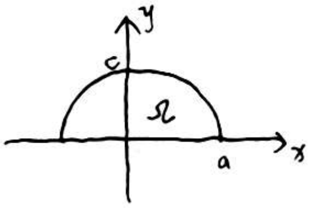
半椭圆盘在平面上的滚动

假设半椭圆由以下区域定义:

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}\le 1,\ y\geq 0\}.$$

其中 $a>0$, $c>0$ 为常数. 不失一般性, 设此半椭圆盘是均质的, 且密度为1. 考虑该物体在仅受重力的情况下在水平地面上的滚动问题(纯滚动且无能量损失).



首先定义几个量: 令M为物体的总质量: $M=\frac{1}{2}ac\pi$.

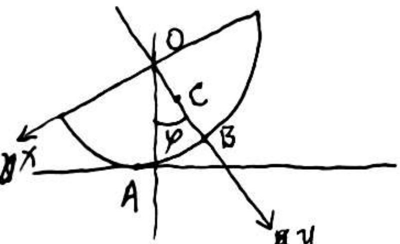
由于物体关于y轴对称, $\iint_\Omega x\,dxdy=0$.

$$\iint_\Omega y\,dxdy=2a\int_0^{c^2}\sqrt{1-\frac{s}{c^2}}\,ds=\frac{2}{3}ac^2.$$

故质心坐标为 $\frac{2}{ac\pi}\left(0,\frac{2}{3}ac^2\right)=\left(0,\frac{4c}{3\pi}\right)=C$

物体关于原点的转动惯量为 $I_0=\iint_\Omega(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{a^2}c\sqrt{x(1-\frac{x}{a})}\,dx+\int_0^{c^2}a\sqrt{x(1-\frac{x}{c})}\,dx=\frac{1}{8}ac\pi(a^2+c^2)$.

故对质心的转动惯量为 $I_c=I_0-\frac{1}{2}ac\pi\cdot\left(\frac{4c}{3\pi}\right)^2=\frac{-8ac^3}{9\pi}+\frac{1}{8}\pi ac(a^2+c^2)$.



令 Oxy 为与物体同固连的坐标系, A为椭圆与地面的切点.

φ为铅直线与Oy轴的夹角.

首先, 如果将摩擦力看作主动力, 那么约束力在虚位移上作功为0, 故此系统为理想约束的力学系统.

下面我们看到, φ唯一确定了A点. 由无滑动条件, AB的弧长也唯一确定了由初始状态$\varphi=0$到切点为A的状态的路径. 故该系统是一个单自由度的具有理想约束的力学系统.

以下从两种角度建立系统的运动微分方程.

设A的x坐标为x. 则 $A=\left(x,c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$. A点切线方向矢量为 $\left(1,\frac{-xc}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)$.

铅垂方向的方向矢量为 $(\sin\varphi,\cos\varphi)$, 内积这两个方向矢量并令其为0, 解得

$$x=\frac{a^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{c^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},\ \text{即}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{\quad}}(a^2\sin\varphi,c^2\cos\varphi).$$

系统的动能：

$$I_A = I_C + M\cdot|AC|^2 = -\frac{8ac^3}{9\pi} + \frac{1}{8}\pi ac(a^2+c^2) + \frac{1}{2}ac\pi\cdot\left(\frac{a^4\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi} + \left(\frac{c^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}} - \frac{4c}{3\pi}\right)^2\right).$$

物体在A点以角速度$\dot\varphi$作旋转，故

$$T = \frac{1}{2}I_A\dot\varphi^2.$$

C相对于地面的高度：

$e = (\sin\varphi, \cos\varphi)$为铅直方向的单位矢量.

则高度$h = -\vec{OC}\cdot e + \vec{OA}\cdot e = -\frac{4c}{3\pi}\cos\varphi + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}$.

故势能U为 $U = Mgh$，$L = T - U$. 运动微分方程为 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi}$.

这里我们不写出具体方程，但给出 $\varphi=0$, $\dot\varphi=0$ 这个平衡点的稳定性判据.

即 $\left.\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0} > 0$，$\frac{\partial h}{\partial\varphi} = +\frac{4c}{3\pi}\sin\varphi + \frac{a^2\sin\varphi\cos\varphi - c^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2} = \frac{4c}{3\pi}\cos\varphi + \frac{1}{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}\left((a^2-c^2)\cos 2\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}(a^2-c^2)\sin 2\varphi\,\frac{\frac{1}{2}(a^2-c^2)\sin 2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = \frac{4c}{3\pi} + \frac{a^2-c^2}{c} > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \sqrt{1-\frac{4}{3\pi}}.$$

重心高度低于曲率中心：$c - \frac{4c}{3\pi} < \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \sqrt{1-\frac{4}{3\pi}}$.

下面用关于A点的动量矩定理来建立微分方程.

由于在绝对坐标系中，切点A是变化的，关于A点的动量矩定理由如下公式给出：

$$\frac{d}{dt}K_A = M v_c \times v_A + M_A \quad (*)$$

其中 K_A为物体关于A点的动量矩，v_c为质心速度，v_A为A点的速度，M_A为外力对A点的矩.

下面我们用φ, $\dot\varphi$表出这些量，并将(*)在z轴上投影.

$K_A = I_A(0,0,\dot\varphi)$. $M_A = \vec{AC}\times Mge$.（这里的量为与刚体固连的坐标系中的量，这是因为平面内上的转动不影响该矢量积在z轴的投影）

令Ω为刚体的瞬时角速度，$\Omega = (0,0,\dot\varphi)$.

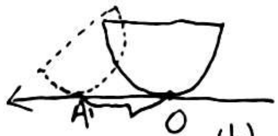
$$\text{则}\quad v_c\times v_A = (\Omega\times\tilde{\vec{AC}})\times v_A = -\Omega(\tilde{\vec{AC}}\cdot v_A) + \tilde{\vec{AC}}(\Omega\times v_A)$$
$$= -\Omega(\tilde{\vec{AC}}\cdot v_A)$$
$$= -\Omega(\vec{AC}\cdot\bar{v}_A)$$

其中$\tilde{\vec{AC}}$为绝对坐标系中的矢量，$\bar{v}_A$为与刚体固连的坐标系中A的速度，$\bar{v}_A = \frac{d}{dt}\left(\frac{a^2\sin\varphi}{\sqrt{\;}}, \frac{c^2\cos\varphi}{\sqrt{\;}}\right)$.

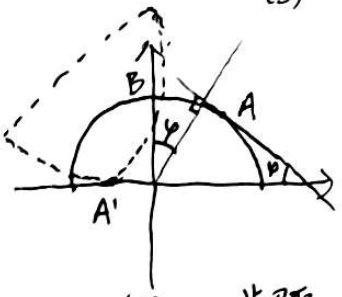
现在 $(*)$ 中所有的量都已知了.

最后. 我们来看一下如何还原真实的半椭圆的运动.

首先, 我们需要确定 A 点的绝对坐标. 若以 $\varphi=0$ 时 椭圆的位置为原点.



(b)



(a)

则 A 的坐标为 BA 的弧长. 即若 $A=(x(\varphi),\ y(\varphi))$,

则 $|OA'|=\int_0^{\varphi}\sqrt{(x'(s))^2+(y'(s))^2}\,ds$.

$$= cE\left(\varphi, 1-\frac{a^2}{c^2}\right)+\frac{(a-c)(a+c)\sin 2\varphi}{\sqrt{2}\,a^2c^2\sqrt{(-a^2+c^2)\cos 2\varphi}}\cdot(a\mp c)$$

那么图 (a) 中实线的半椭圆变换到虚线的半椭圆需要以下两个步骤.

首先将图形整体平移使得 A 与 A' 重合. 再绕着 A' 逆时针旋转 $\varphi+\pi$.