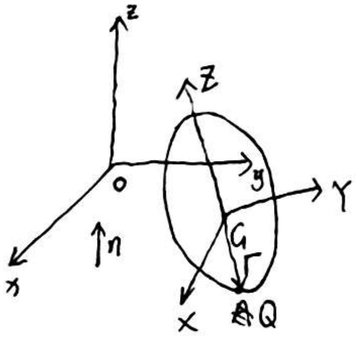
半椭球在平面上的滚动问题

参照马尔契夫《理论力学》114小节，我们对重刚体在平面上的滚动建立动力学模型。



设绝对坐标系为 oxyz，与刚体固连的相对坐标系为 GXYZ。

采用 Arnold 的记号，一切绝对坐标系中的矢量用小写字母表示，该矢量在相对坐标系的投影用其相应的大写字母表示，从相对坐标到绝对坐标的变换为A，例如接触点的矢径为Γ，则 $A\Gamma=\gamma$。

令 ω为刚体的角速度，G为刚体质心，GX，GY，GZ 分别为三个惯性主轴，v_G为质心速度，r为平面约束反力（只包含支撑力与摩擦力）k为刚体对质心的动量矩，n为oxy平面的法向量，与oz方向一致，m为刚体质量，I为刚体惯性矩阵，$K=I\Omega$。

由质心运动定理，

$$\frac{d}{dt}mv_G=-mgn+r\,. \quad (1)$$

而 $\frac{d}{dt}v_G=\frac{d}{dt}AV_G=\dot{A}V_G+A\dot{V}_G=A(\Omega\times V_G)+A\dot{V}_G$，又 $n=AN$，$r=AR$，故 (1) 可写为

$$m\dot{V}_G+m\Omega\times V_G=-mgN+R \quad (2)$$

对G的动量矩定理为

$$\dot{k}=\gamma\times r\,.$$

类似地，我们有 $\dot{K}+\Omega\times K=\Gamma\times R$，即 $I\dot{\Omega}+\Omega\times(I\Omega)=\Gamma\times R$，(3)

由于 n 为常矢量，那么 $\dot{n}=0$，在动系下有 $\dot{N}+\Omega\times N=0$ (4)

最后，接触点Q的绝对速度为0，即 $v_G+\omega\times\gamma=0$。

故 $$V_G+\Omega\times\Gamma=0 \quad (5)$$

联立方程 (2) (3) (4) (5)，消去 R，V_G，我们得到

$$\begin{cases} I\dot{\Omega}+\Omega\times(I\Omega)=\Gamma\times\left(m\frac{d}{dt}(\Gamma\times\Omega)+m\Omega\times(\Gamma\times\Omega)+mgN\right) \\ \dot{N}+\Omega\times N=0 \end{cases} \quad (*)$$

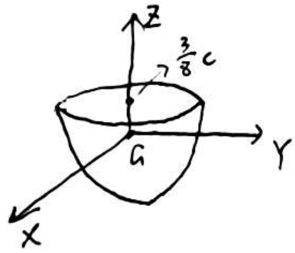
一般地，我们假设 Γ, N 是 t 的函数，那么方程 (*) 是一个六阶的常微分方程组，

状态变量为 N, Ω，这个方程有两个首次积分:

$$\|N\|=1,\qquad E=\frac{1}{2}m\|\Omega\times\Gamma\|^2+\frac{1}{2}\langle I\Omega,\Omega\rangle-mg\langle\Gamma,N\rangle.$$

理论上，若 (*) 的解已知，则运用 Euler 运动学方程以及 $\Omega(t)$ 可知三个 Euler 角的变化，矩阵 A 及 A^{-1} 也可知，又由 (5) $\dot{z}_a=AV_a=-A(\Omega\times\Gamma)$，质心运动也是可以得到的，这样就得到了刚体的绝对运动。

现在考虑半椭球 $\left\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-\frac{3}{8}c)^2}{c^2}\le 1,\ z\le\frac{3}{8}c\right\}$，设椭球是均质的，密度为1.



那么 G 为其质心，$m=\frac{2}{3}abc\pi$.

$I_x=-\frac{3}{32}abc^3\pi+\frac{2}{15}abc(b^2+c^2)\pi$, $I_y=-\frac{3}{32}abc^3\pi+\frac{2}{15}abc(a^2+c^2)\pi$, $I_z=\frac{2}{15}abc(a^2+b^2)\pi$.

设切点的坐标为 (x,y)，$\left(x,y,\frac{3}{8}c-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)=\Gamma$，那么

$$N=\left(-\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{1}{c^2}+\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)x^2+\frac{(-b^2+c^2)y^2}{b^4c^2}}},\ -\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{1}{c^2}+\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)x^2+\frac{(-b^2+c^2)y^2}{b^4c^2}}},\ \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}{c\sqrt{\frac{1}{c^2}+\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)x^2+\frac{(-b^2+c^2)y^2}{b^4c^2}}}\right)$$

这样 N,Γ 用 (x,y) 两个变量表示了，需要在 (*) 中删去一个方程，

最后，我们再来看一下势能在 (x,y) 坐标下的表达式，

$$-\langle\Gamma,N\rangle=\frac{8-3\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}{8\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}-\frac{1}{c^2}\left(-1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}:=U(x,y)$$

$$D^2U(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\begin{pmatrix}\frac{c^2(8a^2-5c^2)}{8a^4} & 0\\ 0 & \frac{c^2(8b^2-5c^2)}{8b^4}\end{pmatrix}.$$

重心高度为 $\frac{5}{8}c$，两个主曲率中心高度分别为 $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2}{c}$，势能极小的条件等价于两个主曲率中心高度都高于重心。