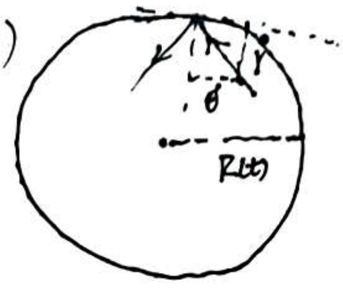
呼吸台球中生成函数的计算

1. 模型及其约化

设 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，一个质点在动边界圆 $x^2(t)+y^2(t)=R^2(t)$ 作自由运动，当质点到达边界时与边界发生完全弹性碰撞.（θ不变，$\dot r\to-\dot r+2\dot R(t)$，右图）



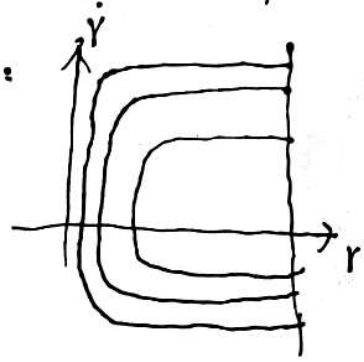
称这样的模型为呼吸(圆)台球模型，其中 R 为 1-周期的 C^2 类函数，$R(t)>0$，$\forall t\in\mathbb{R}$. 系统的 Lagrangian 为

$L(\dot x,\dot y,x,y)=\frac{1}{2}\dot x^2+\frac{1}{2}\dot y^2$，在极坐标 (r,θ) 下，$L=\frac{1}{2}\dot r^2+\frac{1}{2}r^2\dot\theta^2$.

由角动量 $\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=r^2\dot\theta$ 是守恒的. 不妨设 $r^2\dot\theta=c>0$.

则 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r}=\ddot r=\frac{\partial L}{\partial r}=r\dot\theta^2=\frac{c^2}{r^3}$，即 $\ddot r=\frac{c^2}{r^3}$. (1)

$0<r(t)\le R(t)$，当 $r(t)=R(t)$ 时，$\dot r\to-\dot r+2\dot R$ 即系统(1)为一个单自由度的碰撞系统，墙 $r=R(t)$ 为运动的. 固定 $R(t)\equiv$常数，(1)的相图大致为：



2. 边值问题的解

对于 $t_n,t_{n+1}\in\mathbb{R}$，$t_n<t_{n+1}$，考虑边值问题

$$\begin{cases}\ddot r=\frac{c^2}{r^3}, & t\in(t_n,t_{n+1})\\ r^2\dot\theta=c, & t\in(t_n,t_{n+1})\\ r(t)<R(t), & t\in(t_n,t_{n+1})\\ r(t_n)=R(t_n),\quad r(t_{n+1})=R(t_{n+1}) & \end{cases}\qquad (*)$$

若 $r(t;t_n,t_{n+1})$，$\theta(t;t_n,t_{n+1})$ 满足(*)，称其为边值问题(*)的一个解.

命题：固定 $\xi\in(0,1)$，对 $t_{n+1}-t_n$ 满足

$$0<t_{n+1}-t_n<\min\left\{\xi\frac{(\min R(t))^2}{c},\ \frac{\min R(t)}{2\|\dot R\|},\ \frac{2\sqrt{2+\sqrt{1-\xi^2}\min R(t)}}{\sqrt{\|\frac{d^2}{dt^2}(R^2)\|}}\right\}.$$

存在唯一的(*)的解使得：

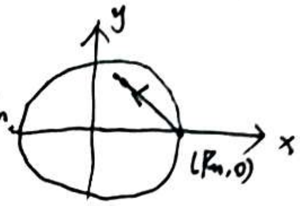
$\dot r(t_n^+) < \min\left\{-\frac{R(t_n)}{t_{n+1}-t_n},\ \dot R(t_n)\right\}$，$\dot r(t_{n+1}^-) > \max\left\{\frac{R(t_{n+1})}{t_{n+1}-t_n},\ 2\dot R(t_{n+1})\right\}$.

证明：为了方便，记 $R(t_n)=R_n$，$R(t_{n+1})=R_{n+1}$，$\delta_n=t_{n+1}-t_n$.

首先注意到：$\ddot r = c^2/r^3$ 的能量为 $\frac{1}{2}\dot r^2+\frac{c^2}{2r^2}=\frac{1}{2}\dot x^2+\frac{1}{2}\dot y^2:=\frac{1}{2}A$.

则 $\frac{dr}{\sqrt{A-\frac{c^2}{r^2}}}=dt \Rightarrow r(t)=\sqrt{\frac{c^2+A^2(t+B)^2}{A}}$，B为常数，由初值确定，注意到 $\dot r=\frac{A(t+B)}{r}$.

不失一般性，设初值在 $(R_n,0)$ 处，即 $\theta(t_n)=0$，$r(t_n)=R_n$



由 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x=\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta=\frac{A(t_n+B)}{R_n} \\ \dot y=\dot r\sin\theta+r\dot\theta\cos\theta=\frac{c}{R_n} \end{cases}$.

因为轨迹为直线，故可参数化为 $s\mapsto\begin{pmatrix} R_n+s\frac{A(t_n+B)}{R_n} \\ s\frac{c}{R_n}\end{pmatrix}$. 不妨设 $A(t_n+B)=l$.

那么 $r(t_{n+1})=R_{n+1}\Rightarrow\left(R_n+\delta_n\frac{l}{R_n}\right)^2+\delta_n^2\frac{c^2}{R_n^2}=R_{n+1}^2$，可解得

$l_\pm=\frac{R_n}{\delta_n}\left(-R_n\pm\sqrt{R_{n+1}^2-\delta_n^2\frac{c^2}{R_n^2}}\right)$，由 $0<\delta_n<\frac{(\min R(t))^2}{c}$，根式下是大于0的.

根据 $l=A(t_n+B)$，$\dot r=\frac{A(t_n+B)}{r}$，$\dot r^2+\frac{c^2}{r^2}=A$.

$\Rightarrow A_\pm=\frac{l_\pm^2+c^2}{R_n^2}$，$B_\pm=-t_n+\frac{l_\pm}{A_\pm}$.

若我们可以从条件中确定出 l_- 是容许的，则 $A(t_n,t_{n+1})$，$B(t_n,t_{n+1})$ 已经定义好了.

$r(t;t_n,t_{n+1})$ 也定义好了. 定义 $\theta(t;t_n,t_{n+1})=\theta(t_n)+\int_{t_n}^{t}\frac{c}{r^2(s;t_n,t_{n+1})}ds$

则(*)中只有 $r(t)<R(t)$，$t\in(t_n,t_{n+1})$ 这一个条件需要验证.

首先来看只有 l^- 是容许的. 由条件 $\dot r(t_n^+)<-\frac{R_n}{\delta_n}$.

$\dot r(t_n^+)=\frac{l_\pm}{R_n}=-\frac{R_n}{\delta_n}\pm\frac{1}{\delta_n}\sqrt{R_{n+1}^2-\delta_n^2\frac{c^2}{R_n^2}}<-\frac{R_n}{\delta_n}$，只有 l^- 可满足条件.

又 $\dot r(t_{n+1}^-)=\frac{A_\pm(t_{n+1}+B)}{R_{n+1}}=\frac{A_\pm(\delta_n+l_\pm)}{R_{n+1}}>\frac{R_{n+1}}{\delta_n}$，即 $A_\pm(\delta_n+l_\pm)>\frac{R_{n+1}^2}{\delta_n}$.

而 $A_\pm(\delta_n+l_\pm)=\frac{1}{\delta_n}\left(R_{n+1}^2\mp R_n\sqrt{R_{n+1}^2-\delta_n^2\frac{c^2}{R_n^2}}\right)>\frac{R_{n+1}^2}{\delta_n}$，取 l^- 时可满足条件.

下面用 l^- 验证 $\dot r(t_n^+)<\dot R(t_n)$，$\dot r(t_{n+1}^-)>2\dot R(t_{n+1})$.

由假设 $0<\delta_n<\frac{\min R(t)}{2\|\dot R\|}$. 可得 $|\dot R(t_n)| \le 2\|\dot R\| < \frac{\min R(t)}{\delta_n} \le \frac{R_n}{\delta_n}$.

故 $\dot r(t_n^+) < -\frac{R_n}{\delta_n} < \dot R(t_n)$. $|\dot R(t_{n+1})| \le \|\dot R\| < \frac{\min R(t)}{2\delta_n} \le \frac{R_{n+1}}{2\delta_n}$.

故 $\dot r(t_{n+1}) > \frac{R_{n+1}}{\delta_n} > 2\dot R(t_{n+1})$. 下面说明 $r(t)<R(t)$. 对 $t\in(t_n,t_{n+1})$.

注意到 $\frac{d}{dt}(R^2(t)-r^2(t))\Big|_{t=t_n^+}>0$. $\frac{d}{dt}(R^2(t)-r^2(t))\Big|_{t=t_{n+1}^-}<0$.

而 $\frac{d^2}{dt^2}(R^2(t)-r^2(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(R^2(t)) - 2A = \left(\frac{d^2}{dt^2}(R^2(t))\right) - \frac{2}{\delta_n^2}\left(R_n^2+R_{n+1}^2+2R_n\sqrt{R_{n+1}^2-\delta_n^2\frac{c^2}{R_n^2}}\right.$

$$< \left\|\frac{d^2}{dt^2}R^2\right\| - \frac{2}{\delta_n^2}\left(2\min R^2 + 2\min R\sqrt{(\min R)^2(1-\xi^2)}\right) < 0.$$

故 $R^2(t)>r^2(t)$. 由 $r^2(t_n)=R(t_n)$ $r^2(t_{n+1})=R^2(t_{n+1})$。

最后，我们将得到的 $r(t;t_n,t_{n+1})$，$\theta(t;t_n,t_{n+1})$ 写在下面.

$$r(t;t_n,t_{n+1}) = \sqrt{\frac{A^2(t_n,t_{n+1})(t+B(t_n,t_{n+1}))^2+c^2}{A(t_n,t_{n+1})}},\quad A(t_n,t_{n+1}) = \frac{R^2(t_n)+R^2(t_{n+1})+2\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}{(t_{n+1}-t_n)^2}$$

$$B(t;t_n,t_{n+1}) = -\left(t_n + \frac{R^2(t_n)+\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}{(t_{n+1}-t_n)A(t_n,t_{n+1})}\right)$$

$$\theta(t;t_n,t_{n+1}) = \theta(t_n) + \int_{t_n}^{t}\frac{c}{r^2(s;t_n,t_{n+1})}ds.$$

3. 生成函数与变分问题

生成函数定义为：

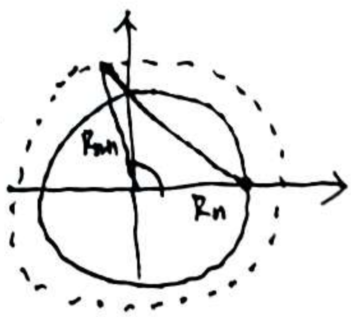
$$h(t_n,t_{n+1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} L(r(t;t_n,t_{n+1}),\dot r(t;t_n,t_{n+1}))\,dt$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\frac{1}{2}\dot r^2-\frac{c^2}{2r^2}\right)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{A(t_n,t_{n+1})}{2}-\frac{c^2}{r^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(t_{n+1}-t_n)A(t_n,t_{n+1}) - c\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{c}{r^2(t;t_n,t_{n+1})}dt.$$

由 θ 的定义 $\theta(t_{n+1})-\theta(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{c}{r^2(t;t_n,t_{n+1})}dt$.

直线长度为 $(t_{n+1}-t_n)\sqrt{\dot x^2+\dot y^2} = (t_{n+1}-t_n)\sqrt{A(t_n,t_{n+1})}$，故由余弦定理.



$$(t_{n+1}-t_n)^2A(t_n,t_{n+1}) = R^2(t_n)+R^2(t_{n+1})-2R(t_n)R(t_{n+1})\cos(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n))$$

可得： $\cos(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)) = -\sqrt{1-\frac{c^2(t_{n+1}-t_n)^2}{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})}}$.

$$\theta(t_{n+1})-\theta(t_n) = -\arctan\left(\frac{c(t_{n+1}-t_n)}{\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}\right).$$

故 $h(t_n,t_{n+1}) = \frac{1}{2}(t_{n+1}-t_n)A(t_n,t_{n+1}) + \arctan\frac{c(t_{n+1}-t_n)}{\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}$

$$= \frac{R^2(t_n)+R^2(t_{n+1}) \mp 2\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}{2(t_{n+1}-t_n)} + \arctan\frac{c(t_{n+1}-t_n)}{\sqrt{R^2(t_n)R^2(t_{n+1})-c^2(t_{n+1}-t_n)^2}}.$$

最后我们来看相应的变分问题：

给出一个序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，使得任一对 $t_{i+1}-t_i$ 都满足边值问题有解的条件。由于碰撞规则不一定满足，这个序列不一定为真实轨道的时间序列。然而，若对 (t_{i-1},t_i,t_{i+1})，$i\in\mathbb{Z}$，$H(s)=h(t_{i-1},s)+h(s,t_{i+1})$　$H(t_i)$ 为极值点，即 $\frac{dH}{ds}\big|_{s=t_i} = h_2(t_{i-1},t_i)+h_1(t_i,t_{i+1})=0$，则 $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 为真实轨道的时间序列。为说明这一点，计算：

$$\partial_{t_n}h(t_n,t_{n+1}) = \partial_{t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}L(r(t),\dot r(t))\,dt = -L(r(t_n),\dot r(t_n^+)) + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial \dot r}{\partial t_n}+\frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t_n}\right)dt$$

$$= -L(r(t_n),\dot r(t_n)) + \frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial r}{\partial t_n}\Big|_{t=t_n}^{t=t_{n+1}}$$

$$= -L(r(t_n),\dot r(t_n^+)) + \frac{\partial L}{\partial \dot r}(t_{n+1})\frac{\partial r}{\partial t_n}(t_{n+1}) - \frac{\partial L}{\partial \dot r}(t_n)\frac{\partial r}{\partial t_n}(t_n).$$

由 $r(t_{n+1};t_n,t_{n+1}) = R(t_{n+1})$，$r(t_n;t_n,t_{n+1}) = R(t_n)$，可得

$\frac{\partial r}{\partial t_n}=0$，$\frac{\partial r}{\partial t_n}(t_n)+\dot r(t_n^+) = \dot R(t_n)$，由 $L=\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{c^2}{2r^2}$.

可得 $\partial_{t_n}h(t_n,t_{n+1}) = \frac{1}{2}\dot r^2(t_n^+) + \frac{c^2}{2R^2(t_n)} - \dot r(t_n^+)\dot R(t_n)$，类似地有

$$\partial_{t_{n+1}}h(t_n,t_{n+1}) = -\frac{1}{2}\dot r^2(t_{n+1}^-) - \frac{c^2}{2R^2(t_{n+1})} + \dot r(t_{n+1}^-)\dot R(t_{n+1})，故$$

$h_1(t_n,t_{n+1})+h_2(t_{n-1},t_n)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot r(t_n^+) - \dot r(t_n^+)\dot R(t_n) = \frac{1}{2}\dot r^2(t_n^-) - \dot r(t_n^-)\dot R(t_n)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\dot r(t_n^+)-\dot R(t_n))^2 = \frac{1}{2}(\dot r(t_n^-)-\dot R(t_n))^2$，由 $\dot r(t_n^+) < \dot R(t_n)$，及 $\cancel{\dot R(t_n)}$ $\dot r(t_n^-) > \dot R(t_n)$，即 $\dot r(t_n^+) = -\dot r(t_n^-) + 2\dot R(t_n)$.