基解矩阵及其性质：光滑与分段光滑情形

基解矩阵作为时间推进映射的导数，其基本性质与计算方法对于研究周期解的分岔与稳定性是至关重要的。

考虑 n 阶非自治系统：

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$t\in\mathbb{R}$，$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 类矢量场。假设 $\forall (t_0,x_0)$，存在唯一解 $\phi(t,t_0,x_0)$，$t\in\mathbb{R}$。

给定 $t_0, t_1\in\mathbb{R}$，定义时间推进映射：

$\psi: x_0 \longmapsto \phi(t_1,t_0,x_0)$，记 $\psi(t_1,t_0)(x_0)=\phi(t_1,t_0,x_0)$。 $d\psi(t_1,t_0)(x_0) = \Phi(t_1,t_0)(x_0) = \phi_{x_0}(t_1,t_0,x_0)$。

由定义 $\Phi(t_1,t_0)(x_0)$ 即时间推进映射的导数（在 x_0 处）。

定理1. 时间推进映射在 x_0 处的导数 $\Phi(t,t_0)(x_0)$ 是以下初值问题的解：

$$\dot{X} = f_x(\phi(t,t_0,x_0),t)\,X, \qquad X(t_0)=I. \tag{2}$$

其中 X 为 $n\times n$ 的矩阵，I 为单位矩阵。

证明：由 $\phi(t,t_0,x_0)$ 满足 (1)，代入并对 x_0 求导得到

$$\dot{\phi}_{x_0}(t,t_0,x_0) = f_x(\phi(t,t_0,x_0),t)\,\phi_{x_0}(t,t_0,x_0),$$

即，

$$\frac{d}{dt}\phi_{x_0}(t,t_0,x_0) = f_x(\phi(t,t_0,x_0),t)\,\phi_{x_0}(t,t_0,x_0).$$

由 $\phi(t_0,t_0,x_0)=x_0$， $\phi_{x_0}(t_0,t_0,x_0)=I$。故 $\phi_{x_0}(t,t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)(x_0)$ 是 (2) 的解。

一般地，称 (2) 为解 $\phi(t,t_0,x_0)$ 的变分方程，其解称作是基解矩阵。许多教材皆将 (2) 的解作为 $\Phi(t_1,t_0)(x_0)$ 的定义，这里我们更强调其作为时间推进映射的导数这一特性。

下面的定理给出 $\Phi(t_0,t_1)$ 的性质。

定理2. 1) $\Phi(t,t_0) = \Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)$

2) 若 $f(x,t)=f(x)$ 不依赖于时间，则 $\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0,0)$，且有

$$f(\phi(t,0,x_0)) = \Phi(t,0)(x_0)\,f(x_0), \quad \forall t\in\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R}^n.$$

证明：利用 $\phi(t,t_0,x_0)=\phi(t,t_1,\phi(t_1,t_0,x_0))$，并对 x_0 求导即得到 1)

同样，若 f 不依赖于时间，那么 $\phi(t,t_0,x_0)=\phi(t-t_0,0,x_0)$，即可得到 2) 的第一条结论。

由于 $\phi(t,0,\phi(s,0,x_0))=\phi(s,0,\phi(t,0,x_0))$，在 $t=0$ 处求导得到

$$\dot\phi(t,0,\phi(s,0,x_0))\Big|_{t=0}=f(\phi(s,0,x_0))=\phi_x(s,0,\phi(t,0,x_0))\dot\phi(t,0,x_0)\Big|_{t=0}=\phi_x(s,0,x_0)f(x_0).$$

即 $\Phi(s,0)(x_0)f(x_0)=f(\phi(s,0,x_0))$。特别地，若 $\phi(t_0,0,x_0)=x_0$，则

$\Phi(t_0,0)(x_0)f(x_0)=f(x_0)$，即 $f(x_0)$ 是 $\Phi(t_0,0)(x_0)$ 1 特征值对应的特征矢量。

接下来我们考虑如何计算分段光滑系统时间推进映射的导数。首先这个映射需要具有可微性才能谈得上导数这一概念。一般地可通过假设流的横截性来确保其可微性。

考虑如下分段光滑系统

$$(*)\quad\begin{cases}\dot x=f_1(x,t), & H(x)<0 \quad (3)\\ \dot x=f_2(x,t), & H(x)>0 \quad (4)\end{cases}$$

其中 f_1,f_2 为 C^2 类矢量场，$H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 C^1 类函数，对 $y\in\{x:H(x)=0\}$，要求 $dH(y)\neq0$，即 $\{x:H(x)=0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个超曲面。记 (3)、(4) 的流分别为 ϕ_1,ϕ_2。

设 $(*)$ 的一个解 $\phi(t,t_0,x_0^*)$ 满足：
$$\begin{cases}H(\phi_1(t,t_0,x_0^*))<0, & t\in[t_0,\tilde t_0)\\ H(\phi_2(t,\tilde t_0,\phi_1(\tilde t_0,t_0,x_0^*)))>0, & t\in(\tilde t_0,t_1].\end{cases}$$

$H(\phi_1(\tilde t_0,t_0,x_0^*))=0$，且 $dH(\phi_1(\tilde t_0,t_0,x_0))\dot\phi_1(\tilde t_0,t_0,x_0)\neq0$，那么由隐函数定理，$\exists\ x_0^*$ 的一个邻域 U 以及一个 C^1 类函数 $\tau:U\to\mathbb{R}$，使得 $x_0\in U$ 时有

$$H(\phi_1(\tau(x_0),t_0,x_0))=0,\quad dH(\phi_1(\tau(x_0),t_0,x_0))\dot\phi_1(\tau(x_0),t_0,x_0)\neq0.$$

定义时间推进映射

$$\Phi:U\to\mathbb{R},\quad x_0\mapsto\phi(t_1,t_0,x_0)=\phi_2(t_1,\tau(x_0),\phi_1(\tau(x_0),t_0,x_0)).$$

下面让我们来计算 Φ 的导数。

引理1. 设 $n(x)$ 为 $H(x)$ 的单位法矢量, 即 $dH(x) = |dH(x)|\, n(x)^T$, 那么我们有

$$d\tau(x_0) = -\frac{n^T \phi_{1x_0}}{\langle n, f_1 \rangle},$$

其中 $n = n(\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0))$, $\phi_{1x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0)$, $f_1 = f_1(\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0), \tau(x_0))$.

证明: 由 $H(\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0)) = 0$, 关于 x_0 求导得到

$$dH\left(\dot\phi_1\, d\tau(x_0) + \phi_{1x_0}\right) = 0, \Rightarrow d\tau(x_0) = -\frac{dH\,\phi_{1x_0}}{dH\,\dot\phi_1} = -\frac{n^T \phi_{1x_0}}{n^T f_1}.$$

引理2. 设 $\dot x = f(x,t)$ 的解为 $\phi(t, t_0, x_0)$, $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. 则 $\cancel{\frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t,t_0,x_0)}$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t, t_0, x_0) = -\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, t_0, x_0)\, f(x_0, t_0).$$

证明: 对 $\phi(t, t_0, x_0) = \phi(t, t_0+s, \phi(t_0+s, t_0, x_0))$ 关于 s 在 $s=0$ 处求导得到

$$\cancel{0 = \frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t, t_0+s, \phi(t_0+s, t_0, x_0))\,\dot\phi(t_0+s, t_0, x_0)\Big|_{s=0}} \ +$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t, t_0+s, \phi(t_0+s, t_0, x_0))\Big|_{s=0} + \frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, t_0+s, \phi(t_0+s, t_0, x_0))\,\dot\phi(t_0+s, t_0, x_0)\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_0}\phi(t, t_0, x_0) + \frac{\partial}{\partial x_0}\phi(t, t_0, x_0)\, f(x_0, t_0)$$

为简洁起见, 对于在分界面处取值的矢量及函数不再写出括号内的量.

定理3.

$$d\psi = \Phi_2(t_1, \tau(x_0))\, S\, \Phi_1(\tau(x_0), t_0)(x_0), \text{其中}$$

$$S = I + (f_2 - f_1)\frac{n^T}{\langle n, f_1 \rangle}.$$ Φ_2, Φ_1 分别为(4) (3)的基解矩阵

证明: $$\frac{d}{dx_0}\left(\phi_2(t_1, \tau(x_0), \phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0))\right) = \frac{\partial}{\partial t_0}\phi_2\, d\tau(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_0}\phi_2\left(\dot\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0)\, d\tau(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_0}\phi_1\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_0}\phi_2 f_2 \cdot \left(-\frac{n^T \phi_{1x_0}}{\langle n, f_1 \rangle}\right) + \phi_{2x_0}\left(f_1\left(-\frac{n^T \phi_{1x_0}}{\langle n, f_1 \rangle}\right) + \phi_{1x_0}\right)$$

$$= \phi_{2x_0}\left(I + (f_2 - f_1)\frac{n^T}{\langle n, f_1 \rangle}\right)\phi_{1x_0},$$

其中我们用到了引理1, 2.

注意到，由S的定义，$Sf_1=f_2$，且若$f_1=f_2$，则$S=I$，这与平凡情况 $f_1(x,t)=f_2(x,t)$ 相对应。

且若 $\langle n,f_2\rangle\neq0$，$S$是非退化的。

$$S^{-1}=I+(f_1-f_2)\frac{n^T}{\langle n,f_2\rangle}.$$

当系统(*)容许在超平面 $\{x: H(x)=0\}$ 存在滑移轨线，此时矩阵S是退化的。实际上，仿类似先前的推导，若f_2的矢量均不在 $\{x: H(x)<0\}$ 而在 $\{x: H(x)=0\}$上，仍可得到

$d\varphi=\Phi_2(t_1,\tau(x))S\Phi_1(\tau(x),t_0)$，$S$的表达式完全一样，不过此时有 $\langle n,f_2\rangle=0$。

命题1：若f_2定义在$\{x: H(x)=0\}$，则S的核由 f_2-f_1 张成。

证明：由 $\langle n,f_2\rangle=0$，$S(f_2-f_1)=f_2-f_1+(f_2-f_1)\frac{n^T(f_2-f_1)}{\langle n,f_1\rangle}=0$。

而一个形如 $I+ab^T$ 的特征值为 $\{1+b^Ta,1,\dots,1\}$。

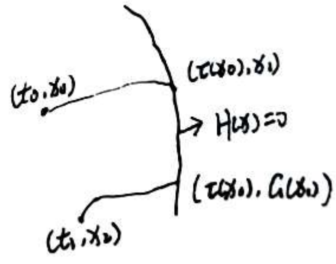
令 $a=\frac{f_2-f_1}{\langle n,f_1\rangle}$，$b=n$，得到 $b^Ta=-1$，故S仅有一个0特征值。

注：对于矩阵 $I+ab^T$（设$a,b\neq0$），与b正交的子空间的基 $\{u_1,\dots,u_{n-1}\}$ 构成了其$n-1$个1相应的特征矢量。

又 $(I+ab^T)a=a+ab^Ta=a(1+b^Ta)=(1+b^Ta)a$，故$a$是 $1+b^Ta$ 对应的特征矢量。

命题1解释了Filippov系统周期解为何总出现一个0乘子。

运用上述方法，我们还可讨论另外一类分段光滑系统：碰撞系统，为了将问题叙述清楚，我们一般化此问题。



考虑系统 $\dot{x}=f(x,t)$。

设系统存在一个超曲面 $\{x: H(x)=0\}$，以及一个保持此曲面不变的映射G，即 $y\in\{x: H(x)=0\}$，则有$H(G(y))=0$。

系统的轨线碰到曲面$\{x: H(x)=0\}$后，其状态作如下变化：

$(t_1,x_1)\longmapsto(t_1,G(x_1))$，和

假设轨线不在曲面$\{x: H(x)=0\}$停留，即 $\langle dH^T,f(x_1,t_1)\rangle\neq0$，$\langle dH^T,f(x_1,t_1)\rangle\neq0$。

类似地，可定义 $\tau(x_0)$ 以及映射

$$\psi: x_0 \longmapsto \phi_2(t_1, \tau(x_0), G(\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0))).$$

这 ~~ϕ_2~~ 其中为了作区分，我们将两段解记为 ϕ_2, ϕ_1。

定理4.

$$d\psi = \Phi_2(t_1, \tau(x_0)) \left(\frac{\dot{\phi}_2 n^T - dG\, \dot{\phi}_1 n^T}{\langle n, \dot{\phi}_1 \rangle} + dG \right) \Phi_1(\tau(x_0), t_0).$$

证明：

$$\frac{d}{dx_0} \phi_2(t_1, \tau(x_0), G(\phi_1(\tau(x_0), t_0, x_0))) = \frac{\partial}{\partial t_0} \phi_2\, d\tau(x_0) + \phi_{2x_0} dG\, (\dot{\phi}_1 d\tau(x_0) + \phi_{1x_0})$$

$$= -\phi_{2x_0} \dot{\phi}_2 \left(-\frac{n^T \phi_{1x_0}}{\langle n, \dot{\phi}_1 \rangle} \right) + \phi_{2x_0} dG \left(\dot{\phi}_1 \cdot -\frac{n^T \phi_{1x_0}}{\langle n, \dot{\phi}_1 \rangle} + \phi_{1x_0} \right)$$

$$= \phi_{2x_0} \left(\frac{\dot{\phi}_2 n^T - dG \dot{\phi}_1 n^T}{\langle n, \dot{\phi}_1 \rangle} + dG \right) \phi_{1x_0}.$$

例. 设系统为 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$,

$H(x,y) = 0$, $G(x,y) = (x, -\gamma y)$. 设碰撞点为 (x^*, y^*, t^*), 则

$$\dot{\phi}_1 = \begin{pmatrix} y^* \\ g(x^*, y^*, t^*) \end{pmatrix}, \quad \dot{\phi}_2 = f(G(x^*, y^*), t^*) = \begin{pmatrix} -\gamma y^* \\ g(x^*, -\gamma y^*, t^*) \end{pmatrix}, \quad n = (1, 0)^T, \quad dG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

此时：

$$\frac{\dot{\phi}_2 n^T - dG \dot{\phi}_1 n^T}{\langle n, \dot{\phi}_1 \rangle} + dG = \frac{1}{y^*} \left(\begin{pmatrix} -\gamma y^* \\ g(x^*, -\gamma y^*, t^*) \end{pmatrix} (1, 0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ g(x^*, y^*, t^*) \end{pmatrix} (1, 0) \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ \frac{1}{y^*}\left(g(x^*, -\gamma y^*, t^*) + \gamma g(x^*, y^*, t^*)\right) & -\gamma \end{pmatrix}.$$