# 外台球与碰撞振子的对应关系

平面上的一条闭凸曲线γ可以用来给出一个动力系统，这个系统的相点在曲线外部，故也称为外台球或对偶台球.

外台球映射如左图1.所示. $(\theta_1, \frac{1}{2}L_1^2) \to (\theta_2, \frac{1}{2}L_2^2)$.

$\quad\ \| \qquad\qquad\quad \|$

$\quad\ \gamma_1 \qquad\qquad\ \ \gamma_2$

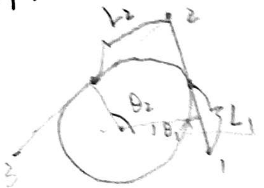



图 1.

Boyland 1996年指出这个系统可与线性碰撞振子对应

$\ddot{x}+x=0$，在 $x=p(t)$ 处有一墙壁运动，其中 $p(t)$ 满足

$\ddot{p}+p=\rho$. $\rho$为外台球的曲率半径. 下面我们尝试说明这一对应关系.

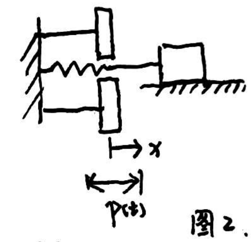
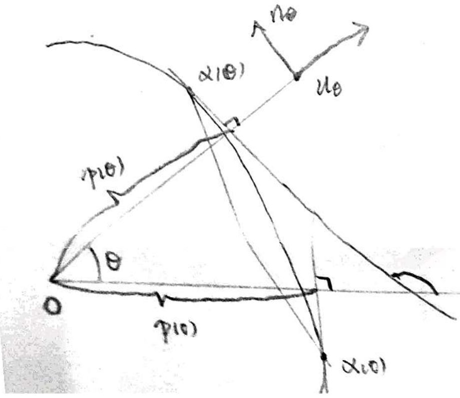



图2.

## 1. 闭凸曲线的高度函数




定义各个几何量如图3所示. 从 $\alpha(0)$ 到 $\alpha(\theta)$ 的弧长为 $s(\theta)$.

注意到 $s'(\theta)$ = 曲率半径. 由于 $s'(\theta)$ 为弧长对切线转角的导数，即为曲率的倒数.

另外有公式 $\alpha'(\theta) = \mp n_\theta s'(\theta)$. 这是由于

$$\alpha(\theta)-\alpha(0) = (s(\theta)-s(0))n_0 + o(\theta^2).$$

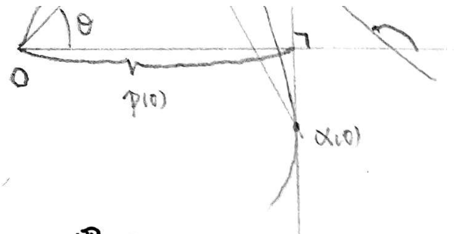



图 3.

另外有公式 $\alpha'(\theta) = n_\theta s'(\theta)$. 这是由于

$$\alpha(\theta)-\alpha(0) = \big(s(\theta)-s(0)\big)n_\theta + o(\theta^2).$$

两点间的距离可用弧长近似代替，而~~半~~角度的变化可以做如下一个简单的论证。将曲线参数化为 $(y, x(y))$，设 $\alpha(\theta) = (y(\theta), x(y(\theta)))$，则 $\alpha'(\theta) = (y'(\theta), x'(y)\,y'(\theta))$.

因此方向由 $(1, x'(y))$ 所确定。而 $\dfrac{1}{x'(y)} = \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\dfrac{\overset{\sin}{\cancel{\cos\theta}}}{\cos\,\cancel{\sin\theta}}$，即 $\left(1, -\dfrac{\overset{\cos}{\cancel{\sin\theta}}}{\dfrac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}\ \sin\cos\theta}\right)$ 为~~某~~ $\alpha'(\theta)$ 的方向。

单位化后即为 $(-\overset{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}, \overset{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}})$.

故我们有 $\alpha(\theta)-\alpha(0) = \int_0^\theta n_\xi \, ds(\xi)$.

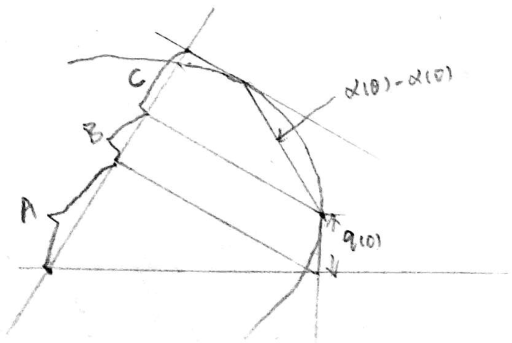



图 4.

由图 4 中的几何关系可以得到：

$$p(\theta) = u_\theta\,(\alpha(\theta)-\alpha(0)) + q(0)\sin\theta + p(0)\cos\theta$$

$$= u_\theta \int_0^\theta n_\xi \, ds(\xi) + q(0)\sin\theta + p(0)\cos\theta$$

$$= \int_0^\theta \sin(\theta-\xi)\, ds(\xi) + q(0)\sin\theta + p(0)\cos\theta$$

$$p'(\theta) = \int_0^\theta \cos(\theta-\xi)\, ds(\xi) + q(0)\cos\theta - p(0)\sin\theta$$

$$p''(\theta) = s'(\theta) - \int_0^\theta \sin(\theta-\xi)\, ds(\xi) - q(0)\sin\theta - p(0)\cos\theta$$

故由上述几个式子:

$$p'(0)=q(0), \qquad p''+p=s', \qquad (\text{也有 } p'(\theta)=q(\theta)).$$

2. 碰撞振子与外台球.

下面我们以不太正式的口吻描述这两者的对应关系

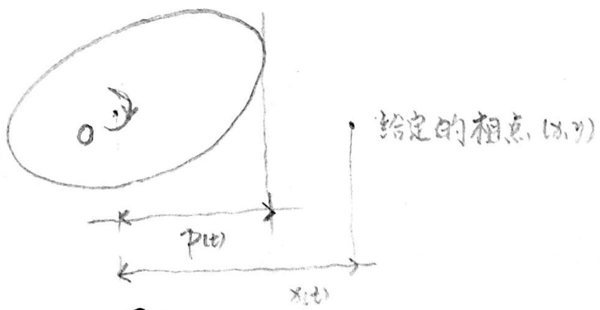



图5

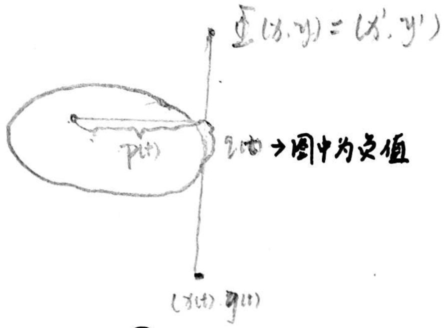



图6

令平面连带相点 $(x,y)$ 及凸曲线绕 O 以角速度 1 顺时针旋转，固定 $x,y$ 轴，则相点满足 $\ddot{x}+x=0$. 现在 $p(\theta)$ 可看作关于时间的变量 $p(t)$，显然是 $2\pi$-周期的，将 $p(t)$ 看作墙壁，发生碰撞即 $x(t)=p(t)$，应满足:

$$-(\dot{x}^+-\dot{p})=\dot{x}^- - \dot{p} \Leftrightarrow \dot{x}^+ + \dot{x}^- = 2\dot{p},$$

而相应地，外台球映射即是 $y$ 方向~~切点~~ $(x,y)$ 到切点与 $\Phi(x,y)$ 到切点的距离相等

而相应地，……

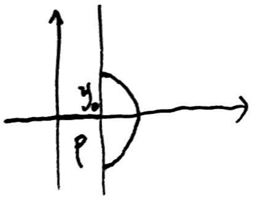
用图6中的几何关系即是 $-y+q(t)=y'-q(t) \Leftrightarrow y'+y=2q(t)=2\dot{p}$

故此时外台球映射与碰撞映射是一致的.

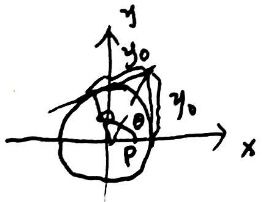
可以先考虑一个平凡的例子

$\dot{p}=p=c$，即外台球的曲线为圆，此时墙固定，对应 $\cancel{\dot{y}+\dot{y}=0}$ $y'+y=2\dot{p}=0$，即反射规则.

关于时间的变换化与角度的对应关系:




时间为 $\int_{-y_0}^{y_0}\frac{dy}{\sqrt{p^2+y_0^2-y^2}}=2\arctan\frac{y_0}{p}$. 而对于以圆为曲线的外台球有




$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{y_0}{p}$，即 $\theta=2\arctan\frac{y_0}{p}$.

利用外台球与~~这个对~~碰撞振子的对应关系，我们可以用椭圆外台球构造一个可积的例子

令 $y=p(t)+\tilde{y}$，则有 $\ddot{y}+y+p(t)=0$，即 $p(t)>0$，即系统变成一个固定墙壁的一个振子问题.