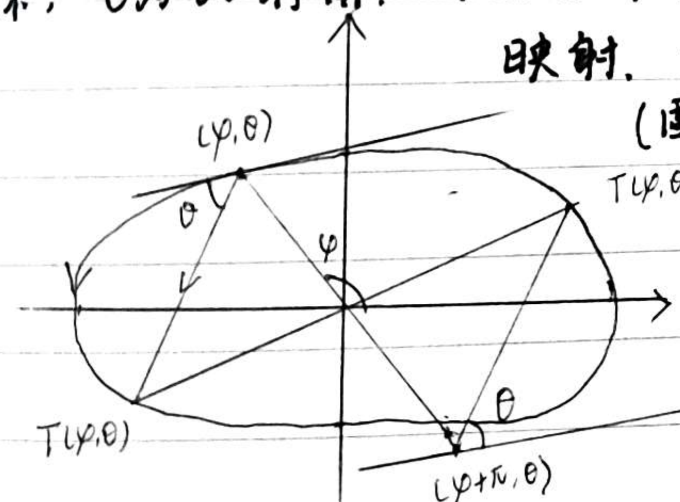
椭圆台球的可积性

设 $C:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$，$a>b>0$。质点在C内作自由运动，并与C的边界发生完全弹性碰撞，反射为通常的反射规律。上述系统称为椭圆台球。由于质点在自由运动与碰撞时能量不会损失，能量为一个守恒量；椭圆台球另一个守恒量为关于两个焦点的角动量之间的乘积。这两个积分使得此系统是完全可积的。并且椭圆台球也是目前唯一知道的可积平面凸台球（圆台球为其特例）。

1. Poincaré 映射及对称性

C的参数化为 $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$，$\varphi\in[0,2\pi]$，取 (φ,θ) 为坐标，θ 为入射角。Poincaré 映射即台球流在C的截面映射。设映射在 (φ,θ) 坐标下为 T（固定速度大小恒为1）



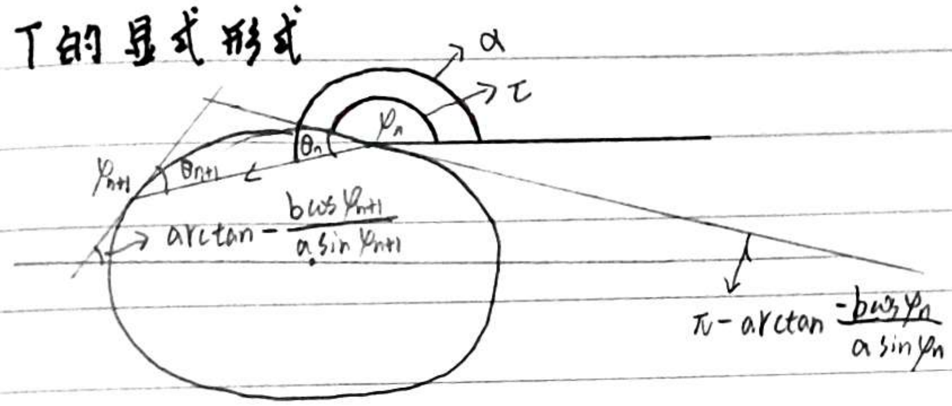
设 $R(\varphi,\theta)=(\varphi+\pi,\theta)$。由椭圆关于原点对称，有

$T\circ R=R\circ T$，因可取 $T(\varphi,\theta)=(\varphi'(\mathrm{mod}\ \pi),\theta')$。

这里就 ……
若A为保序 …… $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$ ……
…… n次(每次)轨道都增加 ……

Date

2. T的显式形式



由上图，易知 $\theta_{n+1} = -\theta_n + \arctan\frac{b}{a\tan\varphi_n} - \arctan\frac{b}{a\tan\varphi_{n+1}}$ 1)

$\theta_n = \alpha - \tau$. 而 $\alpha = \arctan\frac{b\sin\varphi_{n+1} - b\sin\varphi_n}{a\cos\varphi_{n+1} - a\cos\varphi_n} = -\arctan\left(\frac{b}{a}\cot\left(\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{2}\right)\right)$ (*)

$\tau = \arctan -\frac{b}{a\tan\varphi_n}$ (**)

由 $\theta_n = \alpha - \tau$ 及 (*),(**) 可解得

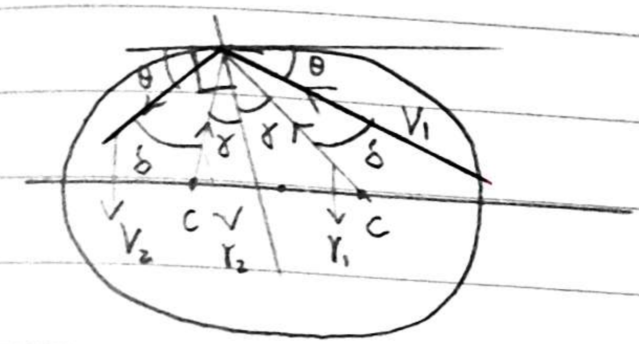
$$\varphi_{n+1} = -\varphi_n + 2\,\mathrm{arccot}\left[\frac{a}{b}\tan\left(\arctan\frac{b}{a\tan\varphi_n} - \theta_n\right)\right] \quad 2)$$

可观察到，1) 2) 给出了T的一个显式形式

3 台球流的首次积分

数值实验可观察到，质点的轨迹可形成如椭圆形双曲线形的包络线，为解释这种现象，下面来计算台球流的首次积分

Date



首先，若 m_1 与 m_2 分别为关于两个焦点的角动量，则 $\langle m_1, m_2\rangle$ 为常量。当质点做自由运动，m_1, m_2 不变，故只需说明碰撞不改变 $\langle m_1, m_2\rangle$。利用椭圆上一点的法线平分此点与两焦点形成的角这一性质，可得到上图

此时，碰撞前

$$|m_1| = |r_1||v_1|\sin\delta, \quad |m_2| = |r_2||v_1|\sin(2\gamma+\delta)$$

碰撞后

$$|m_1| = |r_1||v_2|\sin(\pi-(2\gamma+\delta)) = |r_1||v_2|\sin(2\gamma+\delta)$$

$$|m_2| = |r_2||v_2|\sin(\pi-\delta) = |r_2||v_2|\sin\delta.$$

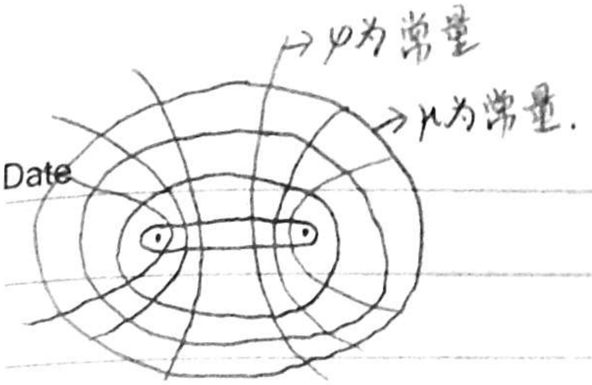
故 $|m_1||m_2|$ 又在碰撞前后也不变。

下面来计算此守恒量在椭圆坐标下的形式。

令 $x = h\cosh\mu\cos\varphi$，$y = h\sinh\mu\sin\varphi$。其中 $h=\sqrt{a^2-b^2}$

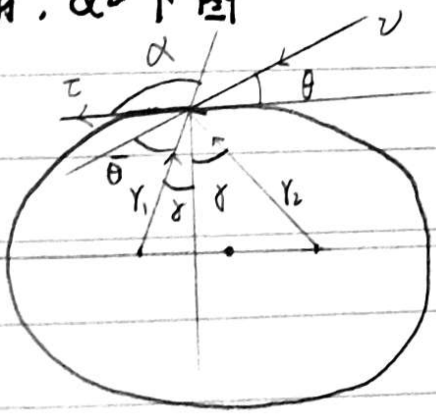
这定义了一个从 (x,y) 到 (μ,φ) 的映射。此映射在 $(-h,0)$ 之间 $(h,0)$ 是奇异的，$\mu\in(0,+\infty)$，$\varphi\in[0,2\pi]$。

固定 μ 而 φ 变化时形成了椭圆，固定 φ，μ 变化时形成双曲线



在椭圆坐标下，曲线C即为 $\mu=\mu_0$，其中 μ_0 满足 $\cosh\mu_0=\frac{a}{h}$.

设质点在t时刻位于 μ 这个椭圆上，其坐标在椭圆坐标下为 φ，令 θ 为 $\mu=\mu$ 这个椭圆在 φ 处的切线与速度矢量的夹角，如下图



$$\angle(r_1, v) = \alpha+\theta$$

$$\angle(r_2, v) = \pi-(\bar{\theta}+2\gamma) = \pi-(\pi-\alpha-\theta+2\alpha-\pi) = \pi-(\alpha-\theta)$$

故 $|r_1||r_2|\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)$ 即为守恒量.

其中 $r_1 = (h\cosh\mu\cos\varphi, h\sinh\mu\sin\varphi) - (-h, 0)$

$r_2 = (h\cosh\mu\cos\varphi), h\sinh\mu\sin\varphi) - (h, 0)$

$$\alpha = \arccos\frac{\langle r_1, \tau\rangle}{|r_1||\tau|}$$

$\tau = (-h\cos\mu\sin\varphi, h\sin\mu\cos\varphi)$.

Date

经过复杂的计算得到:

$$|Y_1||Y_2|\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)=-\frac{h^2}{2}\left(-1+\cos^2\theta\cosh2\mu+\cos2\varphi\sin^2\theta\right)$$

注:文献中此表达式并不统一,有的文献为:

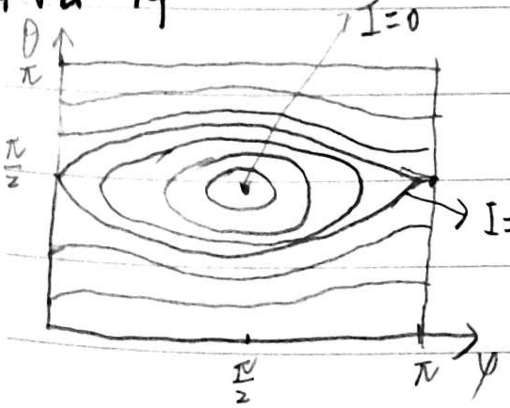
$$\cosh^2\mu\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta.$$

注意到,令 $\mu=\mu_0$,即可得到T映射的守恒量.

4. 动力学的划分,包络线

取守恒量 $I(t)=\cosh^2\mu(t)\cos^2\theta(t)+\cos^2\varphi(t)\sin^2\theta(t)$.

令 $\mu=\mu_0$, $\cosh^2\mu_0\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta$ 的等势线结构如同单摆一样



当 $0<I<1$, φ 限制在一个区域内,而不能遍历 $[0,\pi]$. $\theta(t)$ 变化在 $\frac{\pi}{2}$ 附近的一个区间里,轨线不会与任一个 $0<\mu<\mu_0$ 的椭圆相切. 而当 $\theta(t)=\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $I=\cos^2\varphi$,即 φ 为一个定值,故轨线总是与一个 $\varphi=\varphi_0$ 的双曲线相切,其中 $I=\cos^2\varphi_0$.

这里

若H为保

$\theta_1=\theta_2=\theta_3$

则(例次轨道都增

Date

当$I=1$，利用几何性质可说明轨线总是交替地穿过两个焦点，此时轨线正向地趋近于鞍点，即长轴周期点，负向地也趋向于鞍点。

当$I>1$，此时$\theta(t)$在变化时可为0，而这意味着 $I=\cosh^2\mu_0$，

即轨线总是与一固定的椭圆 $\mu=\bar{\mu}$ 相切，其中 $I=\cosh^2\bar{\mu}$。

deli